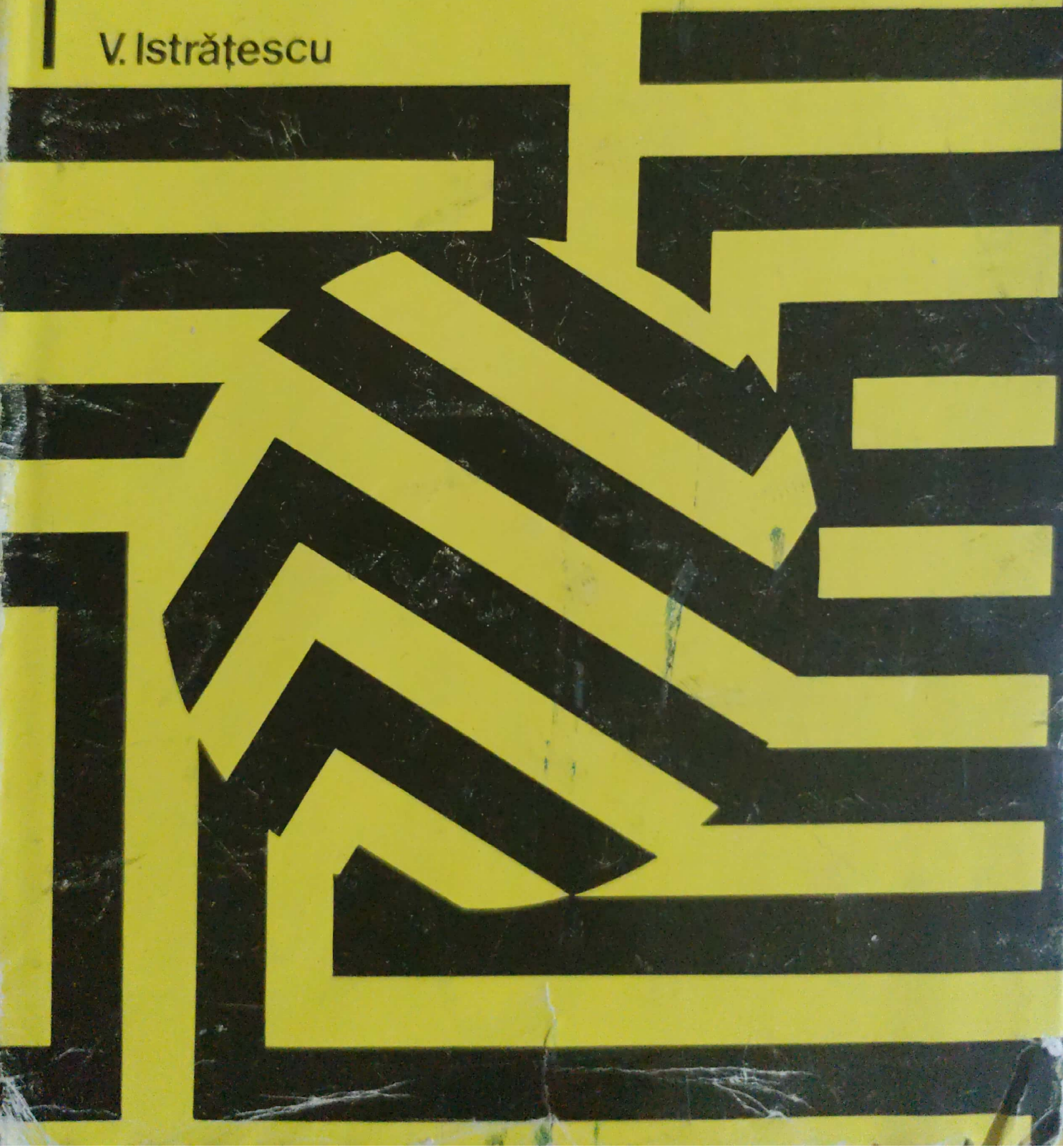
introducere în teoria spațiilor metrice probabiliste cu aplicații

V. Istrățescu



Cartea prezintă o teorie completă a spațiilor metrice probabiliste și unele aplicații în special la teoria fenomenului de histerezis. Teoria spațiilor metrice probabiliste (pe scurt spații P.M. sau P.M.S.) a fost inițiată de Karl Menger în 1942. Importante contribuții la această teorie au adus A. Wald, B. Schweizer, A. Sklar și alții. Cadrul în care prezentăm teoria este cel al spațiilor bitopologice probabiliste care sînt introduse și studiate aici prima dată. O problemă importantă studiată în carte este și geometria spațiilor metrice probabiliste. Este dată o expunere completă a așa-ziselor t-norme cu proprietățile și teorema de structură a lor. Un capitol este dedicat teoriei punctelor fixe în analiza neliniară. Legătura între t-norme și metricele Lévy este de asemenea tratată. În încheiere este dat un appendix care conține noțiuni și rezultate necesare unei lecturi mai fluente.

Scanned with OKEN Scanner

VASILE I. ISTRĂȚESCU

Introducere în teoria spațiilor metrice probabiliste cu aplicații

EDITURA TEHNICĂ — București — 1974

Scanned with OKEN Scanner

Recenzie : prof. dr. **George Ciucu**
Control ştiinţific : dr. docent **Marius Iosifescu**
Redactor : **Lina Ticoş**
Tehnoredactor : **Elena Geru**
Coperta şi supracoperta : **Theodora Doxan**

Bun de tipar : 4.9.74 Coli de tipar : 15,25

Tiraj : 1500 exemplare 90 C. Z. 519

Tiparul executat sub comanda nr. 152 la Întreprinderea Poligrafică I.P.I. str. Brezoianu nr. 23—25

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Este în natura lucrurilor ca, înainte de teoria lui K. Menger privind spațiile metrice statistice, matematicienii să fi creat atari spații particulare și să le fi utilizat. Așa de pildă se lucrează, de cînd există o știință a statisticii, cu spațiul repartițiilor gaussiene metrizat în forme aproape valabile din actualul punct de vedere. Asociat acestui spațiu, Wiener a conceput „haosul omogen", iar spațiilor lui Doob și ale lui Green nu le lipsesc nimic esențial pentru a fi citate în același cadru astăzi așa de cuprinzător.

Ideea metrică introdusă de K. Menger a trebuit să țină seama pe de o parte de conceptul de spațiu metric introdus de M. Fréchet, gînditor, căruia matematica noastră îi datorește mai multe lucruri de cît i se recunosc îndeobște, iar pe de alta de greutatea de a obliga unele spații să respecte rigid axiomele distanței.

Două sînt axiomele care cauzează atari greutăți. Cea mai curentă este axioma care cere ca distanța $\mathrm{d}(x, y)$ *între două elemente oarecare ale spațiului să fie nulă dacă și numai dacă* x *și* y *coincid.*

Presupunînd că $\mathrm{d}(x, y) = 0$, *nu include egalitatea* $x = y$, *dacă celelalte axiome sînt verificate, putem construi un spațiu metric cu clasele de sisteme echivalente definite cu ajutorul relației de echivalență* $\mathrm{d}(x, y) = 0$. *Nu mai este același lucru dacă toate axiomele distanței sînt valabile în afară de aceea a triunghiului. Gîndim că mulți matematicieni au întîlnit acest obstacol în calea metrizării unor spații. Dar nu avem cunoștință că altcineva înainte de K. Menger să fi căutat sistematic și să fi reușit a găsi calea lărgirii conceptului de metrică printr-o modificare adecvată a acestei axiome a triunghiului.*

V. Istrățescu în elaborarea prezentului volum, care sistematizează cea mai mare parte a lucrărilor legate în ultimii ani de conceptul de spațiu metric statistic, a prezentat cu deosebită claritate atît modelul lui K. Menger cît și acela a lui Wald, sau spațiile metrice aleatoare

ale lui O. Onicescu, sau ale lui G. Sîmboan. Era pentru aceasta pregătit, în modul cel mai adecvat, de lucrarea întreprinsă mai de mult împreună cu I. Văduva, asupra spațiului metric produs de spații metrice statistice, în special de spații Menger sau Wald.

Ideea fundamentală a lui K. Menger a fost să înlocuiască funcția $X + Y$ din axioma triunghiului printr-o altă funcție $T(X, Y)$, simetrică de variabilele X, Y, pe care o numește t-normă și care face ca proprietatea

$$d(x, z) \leqslant T(\mathrm{d}x, y), \mathrm{d}(y,z))$$

să califice pe $\mathrm{d}(x, z)$ — celelalte axiome ale distanței fiind îndeplinite — să joace rolul pe care-l joacă distanța din teoria lui Fréchet.

Așa cum rezultă și din capitolul închinat t-normelor în volumul de față, această noțiune a deschis un drum larg generalizărilor a căror întindere acoperă, mai cu seamă după ce se încadrează în topologiile adecvate, întreaga materie care azi interesează nu numai statistica matematică dar și unele domenii ale analizei pure.

Ideea călăuzitoare a lui V. Istrățescu este desigur nu numai atașarea unei structuri topologice spațiilor statistice metrice sau cvasi-metrice, ci și recunoașterea faptului că structura cea mai adecvată pentru studiul proprietăților acestor spații este aceea de spații bitopologice. Voi da ca exemplu, pentru cadrul larg matematic în care se desfășoară teoriile evocate în această carte, sub egida acest oridei topologice, capitolul în care autorul tratează problema contracțiilor și deci a punctului fix în cazul spațiilor metrice probabiliste și extensia acestor considerații la perechi de contracții specifice acestor spații.

Capitolul surprinzător la prima vedere intitulat „Dinamica topologică probabilistă" reprezintă în fapt, dată fiind teorema pe care e greu s-o reproducem aici, o legătură strînsă cu dinamica mișcării browniene. E meritul autorului de a fi arătat legătura necesară între cercetarea spațiilor metrice probabiliste și problemele cele mai actuale întîlnite în studiul proceselor stochastice ca și de altfel în unele probleme ale fizicii, cum sînt cele puse de fenomenul de hysteresis, de care autorul se ocupă în ultimul capitol.

Cartea de față reprezintă mai multe deschideri care pot duce de la analiză la teoriile statistice și invers; aceste deschideri pot fi utilizate pentru progrese în amîndouă aceste forme de gîndire matematică.

Acad. Octav Onicescu

Scanned with OKEN Scanner

Prefața autorului

Scopul cărții de față este prezentarea cît mai completă a teoriei spațiilor metrice probabiliste. Am considerat util să expun această teorie într-un cadru pe care l-am crezut cît mai natural și general. Astfel, prezint mai întîi această teorie utilizînd spațiile cvasi-metrice probabiliste și spațiile bitopologice probabiliste, care sînt introduse aici prima dată. Vom menționa și faptul că în carte sînt date rezultate ale autorului care apar pentru prima dată astfel, în afară de spațiile cvasi-metrice probabiliste deja menționate, noțiuni și rezultate noi sînt date în capitolele consacrate spațiilor normate probabiliste și teoriei punctelor fixe. Capitolul consacrat dinamicii topologice probabiliste, este scris special pentru această carte. Acest capitol, în afară de interesul în sine al noțiunilor și rezultatelor respective, poate fi de un anumit interes în ceea ce privește posibilitatea de dezvoltare ținînd seama de dezvoltarea riguroasă a dinamicii topologice. De asemenea am considerat util să indic în măsura în care acest lucru a fost posibil, unele probleme al căror studiu ar fi deosebit de interesant.

Autorul ține să aducă și pe această cale mulțumirile sale sincere profesorului Berthold Schweizer de la Universitatea Massachusetts, S.U.A., pentru interesul arătat cît și pentru posibilitatea de a consulta înainte de publicare, lucrări ale domniei sale, și profesorului T. Erber de la Institutul de Tehnologie din California, S.U.A., pentru deosebita amabilitate cu care mi-a pus la dispoziție lucrările sale și ale colaboratorilor săi, privind fenomenul de hysterezis.

De asemenea autorul este deosebit de îndatorat acad. profesor O. Onicescu pentru interesul deosebit cu care a urmărit elaborarea acestei cărți cît și a unor lucrări în această teorie; sfaturile și îndemnurile sale mi-au fost de un deosebit ajutor. Trebuie să menționez faptul că preocupările privind teoria spațiilor metrice probabiliste își au originea în expunerile făcute în cadrul seminarului de teoria probabilităților

Scanned with OKEN Scanner

condus de acad. O. Onicescu la Institutul de matematică al Academiei R.S.R. între anii 1960 — 1962.

De un real folos mi-au fost unele discuții avute cu dr. Gheorghe Constantin de la Universitatea din Timișoara, cu Ana I. Istrățescu, cu conf. dr. Ion Săcuiu de la Centrul de Statistică Matematică al Academiei R.S.R.

Țin să mulțumesc în mod deosebit profesorului George Ciucu rector al Universității București și dr. doc. Marius Iosifescu de la Centrul de statistică matematică, pentru observațiile prețioase făcute și care au permis îmbunătățirea redactării manuscrisului.

De asemenea țin să aduc mulțumirile mele redacției de matematică din Editura tehnică pentru atenția acordată la elaborarea acestei cărți.

V. I. Istrățescu

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

Prefaţă 5

Prefaţa autorului 7

Introducere 11

1. *Spaţii metrice probabiliste* 13

1.1. Spaţii metrice probabiliste. Definiţii şi proprietăţi 13
1.2. Clase speciale de spaţii metrice probabiliste 23
1.3. Spaţii metrice probabiliste generalizate 27

2. *t-Norme* 29

2.1. Definiţii şi proprietăţi simple 29
2.2. Teoremă de structură 31
2.3. *t*-norme şi spaţii metrice probabiliste 50

3. *Topologia spaţiilor metrice probabiliste* 55

3.1. Spaţiul bitopologic ataşat unui spaţiu cvasi-metric probabilist. Topologii pe un spaţiu metric probabilist 55
3.2. Spaţiul bitopologic generalizat ataşat unui spaţiu cvasi-metric probabilist sau un spaţiu metric probabilist 61
3.3. Spaţii bitopologice probabiliste şi spaţii topologice probabiliste 71
3.4. Metrizabilitatea spaţiilor metrice probabiliste 78

4. *Produse de spaţii şi spaţii cît probabiliste* 81

4.1. Produse de spaţii metrice probabiliste 81
4.2. Mulţimi în spaţii metrice probabiliste şi distanţa probabilistă între mulţimi 87
4.3. Spaţii cît ale unui spaţiu metric probabilist 94

5. *Generarea spaţiilor metrice probabiliste* 105

5.1. Spaţii cvasi-metrice probabiliste şi cvasi-metric generate 105

6. *Geometria spaţiilor metrice probabiliste* 123

6.1. „Convexitate" şi relaţia „între" în spaţii metrice 123
6.2. Relaţia „între" în spaţii metrice probabiliste 124
6.3. Relaţia „între" în spaţii de tip Wald 131
6.4. Metrica lui Kingman pentru spaţii Wald 140
6.5. Metrică Wald-Harnack probabilistă 141

7. *Spaţii normate probabiliste* 145

7.1. Spaţiu normat probabilist 145
7.2. Topologia spaţiilor normate probabiliste 150
7.3. Clase speciale de spaţii normate probabiliste 151
7.4. Dualul unui spaţiu normat probabilist 153
7.5. Elemente de cea mai bună aproximaţie în spaţii normate probabiliste . 155
7.6. Spaţii local convexe probabiliste 165

8. *Puncte fixe şi spaţii metrice probabiliste* 167

8.1. Contracţii în spaţii metrice probabiliste 167
8.2. Şiruri de aplicaţii şi puncte fixe 173
8.3. Perechi contractive în spaţii metrice probabiliste 176
8.4. Măsuri de necompacitate în spaţii metrice probabiliste 180

9. *Dinamica topologică probabilistă* 185

9.1. Sisteme dinamice pe spaţii metrice şi spaţii metrice probabiliste 185
9.2. Sisteme dinamice probabiliste izomorfe (echivalente) 189
9.3. Stabilitate pentru sisteme dinamice probabiliste 189
9.4. Sisteme dinamice probabiliste generalizate 191

10. *Metrici pe spaţiul funcţiilor de repartiţii* 196

10.1 Metrica lui Lévy 196
10.2 Metrica lui Lévy modificată sau metrica lui Sibley 197
10.3. Metrica lui Lévy modificată şi t-norme 200
10.4. Două teoreme de convergenţă ale lui O. Onicescu 205

11. *Aplicaţii ale teoriei spaţiilor metrice probabiliste* 208

11.1 Fenomenul de hysterezis 208
11.2. Spaţii metrice probabiliste şi fenomenul de hysterezis 210
11.3. Unele inegalităţi pentru funcţii hypergeometrice 220

Appendix 222

I. Topologie generală 222
II. Funcţii de repartiţie şi probabilitate 225
III. Ecuaţia lui Cauchy 230
Bibliografie 233
Indice alfabetic 239
Prezentări în limbi străine 241

Scanned with OKEN Scanner

Introducere

Conceptul de spaţiu metric introdus de M. Fréchet în 1906 constituie un cadru natural pentru multe teorii matematice în care este utilizată noţiunea de distanţă între puncte. Astfel este cunoscut că studiul matematic al unor sisteme fizice utilizează teoria unor clase particulare de spaţii metrice; vom remarca cu acest prilej faptul că anumite concepte şi cantităţi care în situaţia reală sînt neprecise, sînt transpuse în termeni precişi în cadrul abstract. În acest sens trebuie menţionat faptul că „distanţa" între două puncte în situaţia reală este rezultatul unui proces de aproximare sau mediere. În acest caz apare mai natural să considerăm conceptul de „distanţă" din punct de vedere statistic mai de grabă decît deterministic.

Astfel au apărut diferite teorii matematice care permit studiul aprofundat al „incertitudinii" în diferite sisteme fizice.

O teorie matematică de acest tip a fost propusă de K. Menger în 1942 [1], care a dat o generalizare a noţiunii de spaţiu metric şi a indicat cîteva aplicaţii posibile ale acestei teorii.

Legat de conceptul introdus de Menger, O. Onicescu în [32] a considerat o clasă de spaţii care de asemenea generalizează noţiunea de spaţiu metric.

În lucrarea sa fundamentală din 1942, K. Menger a formulat inegalitatea triunghiului cu ajutorul unei funcţii T; aceasta a generat anumite discuţii ca, de exemplu, din partea lui A. Wald care a înlocuit inegalitatea triunghiului propusă de Menger cu alta sugerată de un rezultat din teoria variabilelor aleatoare independente [2]. În 1960 a apărut o lucrare importantă a lui B. Schweizer şi A. Sklar [12] în care punctul de vedere iniţial al lui Menger este reluat şi în care se dezvoltă o teorie aprofundată a spaţiilor metrice probabiliste. Această lucrare a dat un impuls studiilor legate de conceptul introdus de K. Menger.

În încercările de a da o inegalitate a triunghiului pentru spaţii probabiliste, un pas important a fost făcut de A. Şerstnev [27] care a formulat o inegalitate care conţine drept cazuri particulare inegalităţile date de Menger şi Wald.

Scanned with OKEN Scanner

În [80] B. Schweizer, A. Sklar și T. Erber au găsit o aplicație foarte interesantă a spațiilor metrice probabiliste la teoria fenomenului de histerezis din fizică. Este posibil așa cum K. Menger a indicat în lucrarea sa [1] din 1942 ca teoria spațiilor metrice probabiliste să-și găsească aplicații și în psihologie.

O altă teorie a fost propusă de L. Zadeh, cu ajutorul unui concept care corespunde situației cînd nu există un criteriu precis de apartenență al unui obiect la o anumită clasă de obiecte.

În lucrare vom expune teoria spațiilor introduse de Menger și vom arăta legătura cu teoria propusă de Zadeh.

Scanned with OKEN Scanner

1 Spaţii metrice probabiliste

Vom prezenta în cele ce urmează noţiunea de spaţiu metric probabilist împreună cu unele generalizări naturale, printre care vom menţiona spaţiile cvasi-metrice probabiliste, spaţiile metrice probabiliste nearhimedeene şi spaţiile de tip Şerstnev.

De asemenea vom da unele exemple de spaţii metrice probabiliste echilaterale etc. Capitolul se încheie cu unele rezultate privind legătura între diferite clase de spaţii.

1.1. Spaţii metrice probabiliste. Definiţii şi proprietăţi

Vom reaminti noţiunea de spaţiu metric introdusă de M. Fréchet în 1906 şi apoi noţiunea de spaţiu cvasi-metric studiată de Wilson în 1931.

Fie S o mulţime abstractă şi $p : S \times S \to R$ o funcţie reală.

DEFINIŢIA 1.1. O cvasi-metrică pe mulţimea S este o funcţie $p : S \times S \to R$ cu următoarele proprietăţi :

1) $p(x, x) = 0, \forall\, x \in S,$

2) $p(x, z) \leqslant p(x, y) + p(y, z), \forall\, x, y, z \in S.$

Se spune că p este metrică dacă mai satisface şi relaţia

3) $p(x, y) = 0$, dacă şi numai dacă $x = y$.

Este uşor de văzut dacă p este o cvasi-metrică (respectiv metrică) atunci $q : S \times S \to R$ definită prin

$$q(x, y) = p(y, x)$$

Scanned with OKEN Scanner

este de asemenea o cvasi-metrică (respectiv metrică). Se mai spune că p și q sînt conjugate. Dacă p și q sînt cvasi-metricile definite mai sus, mulțimea S cu structura dată de acestea se notează cu (S, p, q).

Dacă p este o cvasi-metrică pe S în sensul definiției 1.1, atunci prin p-sfera deschisă cu centrul în x și rază k se înțelege mulțimea

$$p(x, k) = \{y, p(x, y) < k\}.$$

Este ușor de văzut că mulțimea acestor sfere deschise formează o bază pentru o topologie τ_p pe S. În mod analog se definește o topologie σ_q, cu ajutorul cvasi-metricii q.

DEFINIȚIA 1.2. Un spațiu S pe care sînt definite două topologii τ și σ este numit spațiu bitopologic.

Pentru a defini spațiile considerate de K. Menger vom avea nevoie de unele definiții și notații preliminare.

Fie $I = [0,1]$ și Δ mulțimea funcțiilor reale F nedescrescătoare, continue la stînga și cu proprietățile :

1) $F(0) = 0$,

2) $F(t) \in I \qquad \forall\, t \in R$.

DEFINIȚIA 1.3. Prin normă triunghiulară (pe scurt t-normă) se înțelege o funcție definită pe $I \times I$ cu valori în I cu următoarele proprietăți :

1) $T(0,0) = 0, \quad T(a,1) = a$,

2) $T(a,b) = T(b,a)$,

3) $T(a,b) \leqslant T(a',b')$ dacă $a \leqslant a'$, $b \leqslant b'$,

4) $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ oricare ar fi a, b, c în I

și vom presupune că este continuă la stînga în fiecare variabilă.

În mulțimea Δ se găsește o funcție specială și anume

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

DEFINIȚIA 1.4. Prin spațiu metric probabilist vom înțelege o pereche ordonată (S, F) unde S este o mulțime abstractă iar F este o funcție definită pe $S \times S$ cu valori în Δ (valoarea în $(r, s) \in S \times S$ o notăm $F_{r,s}$) și care satisface următoarele axiome :

1) $F_{r,s}(x) = 1 \qquad \forall\, x > 0$ dacă și numai dacă $r = s$,

2) $F_{r,s} = F_{s,r} \qquad \forall\, r, s \in S$,

3) dacă $F_{r,u}(x) = 1$ și $F_{u,s}(y) = 1 \quad \forall\, r, u, s \in S$ atunci $F_{r,s}(x+y) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 1.5. Un spațiu cvasi-metric probabilist este o pereche ordonată (S, F) unde S este o mulțime abstractă iar F este o funcție definită pe $S \times S$ cu valori în Δ care satisface proprietățile 1) și 3) din definiția 1.4.

Este ușor de văzut că orice spațiu metric obișnuit ori cvasi-metric este un spațiu metric probabilist ori cvasi-metric probabilist de tip special și anume în care aplicația F este definită astfel: pentru orice $(r,s) \in S \times S$; p fiind metrica (respectiv cvasi-metrica) să punem

$$F_{r,s}(x) = H(x - p(r,s)).$$

Dacă $F_{r,s}(x)$ este interpretat ca fiind probabilitatea ca distanța dintre r și s să fie mai mică decît x atunci axioma 3) (un fel de inegalitate a triunghiului) poate fi interpretată astfel: dacă probabilitatea ca distanța între r și u să fie mai mică decît x este 1 și probabilitatea ca distanța între u și s să fie mai mică decît y este 1 atunci și probabilitatea ca distanța între r și s să fie mai mică decît $x + y$ este de asemenea 1.

K. Menger în lucrarea sa din 1942 a construit teoria spațiilor metrice probabiliste utilizînd în loc de axioma 3) următoarea axiomă

$$\text{IV}_\text{m}) \qquad F_{r,s}(x + y) \geqslant T(F_{r,u}(x), F_{u,s}(y))$$

pentru o anumită t-normă și oricare ar fi r, u, s în S.

DEFINIȚIA 1.6. Un spațiu metric probabilist Menger este o pereche (S,F) care satisface axiomele 1), 2) și IV_m).

Similar definim spațiile cvasi-metrice probabiliste Menger.

O clasă importantă de spații metrice probabiliste și spații cvasi-metrice probabiliste a fost introdusă de A. Wald și ea a fost sugerată de teoria variabilelor aleatoare independente.

DEFINIȚIA 1.7. Un spațiu metric probabilist este spațiu Wald dacă satisface axiomele 1), 2) și următoarea axiomă

$$\text{IV}_\text{w}) \qquad F_{r,s}(x) \geqslant \int_0^x F_{r,u}(x-y) F_{u,s}(y)\, dy = (F_{r,u} \otimes F_{u,s})(x).$$

Legătura dintre spațiile metrice (cvasi-metrice) probabiliste de timp Menger și cele de tip Wald este dată în teoremele 1.8 și 1.9.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1.8. Orice spaţiu metric (cvasi-metric) probabilist de tip Wald este un spaţiu de tip Menger (metric probabilist ori cvasi-metric probabilist) pentru t-norma $T(x,y) = xy$.

Demonstraţie. Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist de tip Wald (cvasi-metric de tip Wald). În acest caz, pentru orice $x, y \in R_+$ avem

$$F_{r,s}(x+y) \geqslant \int_0^{x+y} F_{r,u}(x+y-z)\mathrm{d}F_{u,s}(z) = \int_0^{x+y}\left[\int_0^{x+y-z} \mathrm{d}F_{r,u}(t)\right]\mathrm{d}F_{u,s}(z) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{t,z\geqslant 0\\ t+z\leqslant x+y}} \mathrm{d}F_{r,u}(t)\mathrm{d}F_{u,s}(z).$$

Cum dreptunghiul

$$\{(t,z) : 0 \leqslant t \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$$

este inclus în triunghiul $\{(t,z) : t,\ z \geqslant 0,\ t+z \leqslant x+y\}$ şi funcţiile $F_{r,u}$, $F_{u,s}$ sînt nedescrescătoare, avem

$$\iint\limits_{\substack{t,z\geqslant 0\\ t+z\leqslant x+y}} \mathrm{d}F_{r,u}(t)\,\mathrm{d}F_{u,s}(z) \geqslant \iint\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant x\\ 0\leqslant z\leqslant y}} \mathrm{d}F_{r,u}(t)\,\mathrm{d}F_{u,s}(z) = \int_0^x\int_0^y \mathrm{d}F_{r,u}(t)\,\mathrm{d}F_{u,s}(z) =$$

$$= \int_0^x \mathrm{d}F_{r,u}(t) \int_0^y \mathrm{d}F_{u,s}(z) = F_{u,r}(x)\,F_{u,s}(y)$$

şi ţinînd seama de inegalitatea de la început, teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.9. Dacă (S,F) este un spaţiu metric (cvasi-metric) probabilist de tip Menger cu $T(x,y) = \max\{x, y\}$ atunci (S, F) este un spaţiu metric (cvasi-metric) de tip Wald.

Demonstraţie. Fie r, u, s în S. Dacă $r = s$ atunci $F_{r,s} = H$ şi afirmaţia teoremei este demonstrată. Dacă $r = u$ avem

$$F_{r,s}(x) = F_{u,s}(x) = \int_0^x \mathrm{d}F_{u,s}(y) = \int_0^x H(x-y)\,\mathrm{d}F_{u,s}(y) =$$

$$= \int_0^x F_{r,u}(x-y)\,\mathrm{d}F_{u,s}(y) = (F_{r,u} \otimes F_{u,s})\,(y)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi analog se procedează dacă $u = s$. Rămîne astfel de considerat numai cazul cînd toate punctele r, u, s sînt distincte. În acest caz pentru $x > 0$

$$F_{r,s}(x) = \max\{F_{r,u}(x), F_{u,s}(x)\} = F_{u,s}(x) = \int_0^x dF_{u,s}(y) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^x F_{r,u}(x-y)\, dF_{u,s}(y) = (F_{r,u} \otimes F_{u,s})(x)$$

şi teorema este demonstrată.

O clasă de spaţii metrice probabiliste a fost introdusă de A. Istrăţescu şi a fost sugerată de spaţiile ultrametrice. Această clasă este introdusă în:

DEFINIŢIA 1.10 Prin spaţiu metric probabilist nearhimedean vom înţelege o pereche (S,F) unde S este o mulţime abstractă, iar F o funcţie definită pe $S \times S$ cu valori în Δ satisfăcînd următoarele axiome:

1) $F_{r,s}(x) = 1$, $\forall\, x > 0$ dacă şi numai dacă $r = s$,

2) $F_{r,s} = F_{s,r}$, $\forall\, r,\ s \in S$,

3) pentru o anumită t-normă T,

$$F_{r,s}(\max(x,y)) \geqslant T(F_{r,u}(x), F_{u,s}(y))$$

oricare ar fi r, u, s în S şi x, $y > 0$.

Vom spune că (S,F) este un spaţiu metric probabilist nearhimedean de tip Menger.

În [32], O. Onicescu a considerat un nou mod de a defini spaţiile metrice probabiliste şi care generalizează spaţiile metrice. Fie pentru aceasta $(E,\mathcal{K},P)$ un cîmp de probabilitate. Clasa de spaţii o introducem prin:

DEFINIŢIA 1.11. Un spaţiu metric aleator este o pereche ordonată (S,F) unde S este o mulţime abstractă iar F este o funcţie definită pe $S \times S$ cu valori în mulţimea variabilelor aleatoare pozitive definite pe $(E,\mathcal{K},P)$ şi satisfăcînd următoarele axiome: prin $\delta_{r,s}$ înţelegem valoarea aplicaţiei F în $(r,s) \in S \times S$,

1) $\delta_{r,s} = 0$ dacă şi numai dacă $r = s$,

2) $\delta_{r,s} = \delta_{s,r}$;

3) $E(\delta_{r,s}) \leqslant E(\delta_{r,u}) + E(\delta_{u,s})$

oricare ar fi r, u, $s \in S$ și E însemnînd aici valoarea medie pentru variabila aleatoare respectivă.

Putem introduce o clasă de spații similare celor considerate de O. Onicescu, sugerate de spațiile ultrametrice și acest lucru îl dăm în:

DEFINIȚIA 1.12. Un spațiu metric aleator nearhimedean este o pereche ordonată (S,F) unde F satisface axiomele 1) și 2) din definiția 1.10 și

3') $E(\delta_{r,s}) \leqslant \max \{E(\delta_{r,u}), E(\delta_{r,s})\}$

oricare ar fi r, u, $s \in S$.

Este ușor de văzut că orice spațiu metric sau ultrametric este un caz particular de spațiu considerat în definiția 1.11 respectiv definiția 1.12. În adevăr, fie f o variabilă aleatoare pozitivă cu $E(f) \neq 0$ și pentru orice r, $s \in S$, ρ fiind metrica spațiului S să punem

$$\delta_{r,s}(w) = f(w)\,\rho(r,s)$$

și se verifică ușor că toate axiomele spațiilor din definițiile 1.10 și 1.11 sînt îndeplinite.

O clasă de spații metrice aleatoare a fost considerată de G. Sâmboan și alții [19].

DEFINIȚIA 1.13. Un spațiu metric aleator de ordin p este o pereche ordonată (S,F) unde S este o mulțime abstractă iar F o aplicație definită pe $S \times S$ cu valori în $L^p(E,\mathcal{K},P)$ cu următoarele proprietăți:

1) $F_{r,s} = 0$ dacă și numai dacă $r = s$,

2) $F_{r,s} = F_{s,r}$,

3) $E(|F^p_{r,s}|) \leqslant T\,(E(|F^p_{r,u}|), E(|F^p_{u,s}|)$

oricare ar fi r, s $u \in S$ și $T : R_+ \times R_+ \to R_+$ având următoarele proprietăți:

1) $T(x,y) = T(y,x)$,

2) $x \leqslant y \Rightarrow T(x,z) \leqslant T(y,z)$,

3) $T(x,1) = x$,

4) $\inf\limits_{x \in R_+} T(x,x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

O clasă importantă de spaţii metrice probabiliste a fost considerată de A. Serstnev şi conţine drept cazuri particulare spaţiile introduse de Menger şi Wald.

Pentru a defini clasa de spaţii considerată de Serstnev, fie

$$\tau : \Delta^1 \times \Delta^1 \to \Delta^1 \text{ unde } \Delta^1 = \{F,\ F \in \Delta,\ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1\}.$$

DEFINIŢIA 1.14. Funcţia τ se spune că este o funcţie triunghiulară dacă are următoarele proprietăţi :

1) $\tau(F,H) = F, \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

2) $\tau(F_1,G_1) \leqslant \tau(F_2,G_2)$ dacă $F_1 \leqslant F_2$ şi $G_1 \leqslant G_2$,

3) $\tau(F,G) = \tau(G,F)$,

4) $\tau(\ \tau(F,G),L) = \tau(F,\tau(G,L))$.

DEFINIŢIA 1.15. Un spaţiu metric probabilist de tip Şerstnev este o pereche ordonată (S,F) în care S este o mulţime abstractă iar F este o funcţie definită pe $S \times S$ cu valori în Δ şi satisfăcînd următoarele axiome :

1) $F_{r,s} = H$ dacă şi numai dacă $r = s$,

2) $F_{r,s} = F_{s,r} \qquad \forall\ r,s \in S$,

3) $F_{r,s} \geqslant \tau(F_{r,u}, F_{u,s})\ \forall\ r,s,u \in S$ şi τ o funcţie triunghiulară avînd proprietăţile date în definiţia 1.14.

Vom arăta acum că spaţiile introduse în definiţia 1.15 conţin spaţiile de tip Menger şi de tip Wald pentru o alegere a funcţiei triunghiulare τ.

TEOREMA 1.16. Dacă (S,F) este un spaţiu metric probabilist de tip Şerstnev şi funcţia triunghiulară τ are proprietatea că oricare ar fi $x,y \in R$

$$\tau(H(j - x), H(j - y)) \geqslant H(j - (x + y))$$

unde $j(t) = t$ oricare ar fi $t \in R$, atunci (S,F) este un spaţiu metric probabilist în care

$$F_{r,s}(x + 0) = 1 \text{ şi } F_{s,u}(y) = 1 \Rightarrow F_{r,s}(x + y) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să remarcăm că dacă $F \in \Delta$ și $F(x+0) = 1$ pentru un $x \geqslant 0$ atunci $F \geqslant H(j-x)$ și reciproc. De aici rezultă că

$$F_{r,s}(x+y) \geqslant \tau(F_{r,u}(x),\ F_{u,s}(y) \geqslant$$
$$\geqslant \tau(H(j-x),\ H(j-y)) \geqslant H(j-(x+y))$$

și teorema este demonstrată.

Legătura între spațiile metrice probabiliste de tip Șerstnev și cele de tip Wald este dată de:

TEOREMA 1.17. Un spațiu metric probabilist de tip Șerstnev este de tip Wald dacă și numai dacă $\tau(F,G) = F \otimes G$ unde $\otimes$ este convoluția celor două funcții F și G, definită prin

$$(F \otimes G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\, \mathrm{d}G(t) = (G \otimes F)(x).$$

Demonstrație. Cum $\tau(F,G) = F \otimes G$ are proprietățile de a fi comutativă și asociativă și H are proprietatea de a fi element neutru, afirmația teoremei este evidentă.

Pentru a arăta legătura între spațiile de tip Șerstnev și cele de tip Menger vom avea nevoie de cîteva rezultate preliminare privind t-normele T.

Vom da mai întîi următoarea:

DEFINIȚIE 1.18. O t-normă T este continuă la stînga dacă

$$\lim_{\substack{x \to a,\ x<a \\ y \to b,\ y<b}} T(x,y) = T(a,b)$$

oricare ar fi $(a, b) \in I \times I - \{0,0\}$.

Are loc:

TEOREMA 1.19. Dacă T este o t-normă continuă la stînga și $F, G \in \Delta^1$ atunci funcția definită prin

$$L(t) = \sup_{u+v=t} T(F(u),\ G(v))$$

este în Δ^1.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Este ușor de văzut că L are următoarele proprietăți :

1) $L(0) = 0$,

2) $L(t_1) \leqslant L(t_2)$ dacă $t_1 \leqslant t_2$,

3) $L(t) \in [0,1]$.

Rămîne să arătăm că L este continuă la stînga. Fie pentru aceasta $t_0 > 0$ și $\varepsilon > 0$ dat. Dacă $L(t_0) = 0$ atunci L este evident continuă la stînga în t_0. Putem deci presupune că $L(t_0) > 0$ și în acest caz există u_0, v_0 astfel încît

1) $u_0 + v_0 = t_0$,

2) $0 \leqslant L(t_0) - T(F(u_0), G(v_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$;

Cum însă T este continuă la stînga în $(F(u_0), G(v_0))$ rezultă că există $\eta > 0$ astfel încît

$$\left.\begin{array}{l} F(u_0) - s < \eta \\ G(v_0) - w < \eta \end{array}\right\} \Rightarrow T(F(u_0), G(v_0)) - T(r,w) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să ținem seama acum că și funcțiile F, G sînt continue la stînga în u_0, v_0 respectiv și deci există $\delta > 0$ astfel ca

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leqslant u_0 - u_1 < \frac{\delta}{2} & F(u_0) - F(u_1) < \eta, \\ & \Rightarrow \\ 0 \leqslant v_0 - v_1 < \frac{\delta}{2} & G(v_0) - G(v_1) < \eta. \end{array}\right.$$

Fie acum t_1 astfel încît $0 < t_0 - t_1 < \delta$ și să luăm u_1 și v_1 astfel ca

1. $0 \leqslant u_0 - u_1 < \frac{\delta}{2}$,

$$0 \leqslant v_0 - v_1 < \frac{\delta}{2}.$$

2. $u_1 + v_1 = t_1$

și deci avem

$$T(F(u_0), G(v_0)) - T(F(u_1), G(v_1)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$0 \leqslant L(t_0) - L(t_1) \leqslant L(t_0) - T(F(u_1),G(v_1)) =$$
$$= L(t_0) - T(F(u_0),\ G(v_0)) + T(F(u_0),G(v_0)) - T(F(u_1),G(v_1)) < \varepsilon$$

și deci L este continuă la stînga. Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă un mod de a construi funcții triunghiulare.

TEOREMA 1.20. Dacă T este o t-normă continuă la stînga atunci

$$\tau_T : \Delta^1 \times \Delta^1 \to \Delta^1$$

definită prin

$$\tau_T(F,G,t) = \sup_{t=u+v} \{T(F(u),\ G(v))\}$$

este o funcție triunghiulară.

Demonstrație. Din teorema 1.18 rezultă că oricare ar fi $F,\ G \in \Delta^1$, $\tau_T(F,G)$ este în Δ^1 și este ușor de văzut ținînd seama de proprietățile funcției T că τ_T are proprietățile 1—3 din definiția 1.14. Să arătăm că τ_T este asociativă. Vom remarca mai întîi că, pentru orice parte $A \subset I = [0,1]$, avem

$$\sup_{x \in A} T(x,\ b) = T(\sup\ A,\ b)$$

deoarece T este continuă la stînga. Fie acum $F,\ G,\ L$ în Δ^1 și deci cum

$$\tau_T(\tau_T(F,G),\ L,t) = \sup_{u+v=t} T(\tau_T(F,G,\ u),\ L(v)) =$$
$$= \sup_{u+v=t} T(\sup_{s_1+t_1=u} T(F(s_1),\ G(t_1)),\ L(v)) =$$
$$= \sup_{u+v=t} \sup_{s_1+t_1=u} T(T(F(s_1),\ G(t_1)),\ L(v)) =$$
$$= \sup_{s_1+t_1+v=t} T(T(F(s_1),\ G(t)_1)),\ L(v)) = \sup_{s_1+t_1+v=t} T(F(s_1),\ T(G(t_1),\ L(v))) =$$
$$= \sup_{s_1+w=t} \sup_{t_1+v=w} T(F(s_1),\ T(G(t_1),\ L(v))) =$$
$$= \sup_{s_1+w=t} T(F(s_1),\ \sup_{t_1+v=w} T(G(t_1),\ L(v))) =$$
$$= \sup_{s_1+w=t} T(F(s_1),\ \tau_T(G,L,w)) = \tau_T(T,\ \tau_T(G,L),\ t).$$

Teorema este demonstrată.

Teorema de mai sus ne permite să arătăm că orice spaţiu Menger poate fi pus în corespondenţă cu un spaţiu Şerstnev.

TEOREMA 1.21. Fie T o t-normă continuă la stînga şi τ_T funcţia triunghiulară dată în teorema 1.20. În acest caz (S,F) cu τ_T este un spaţiu Şerstnev dacă şi numai dacă (S,F) este un spaţiu Menger cu t-norma T.

Demonstraţie. Să presupunem că (S,F) este un spaţiu metric probabilist de tip Şerstnev şi $r, s, u \in S$ iar $x, y \in R_+$,

$$F_{r,s}(x+y) \geqslant \tau_T(F_{r,u}, F_{u,s}, x+y) =$$
$$= \sup_{w+v=x+y} T(F_{r,u}(w), F_{u,s}(v)) \geqslant T(F_{r,u}(x), F_{u,s}(y))$$

şi deci este un spaţiu metric probabilist de tip Menger.

Să presupunem acum că (S, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger şi deci pentru t-norma T avem,

$$F_{r,s}(x+y) \geqslant T(F_{r,u}(x), F_{u,s}(y))$$

oricare ar fi $x, y \geqslant 0$. Deci

$$F_{r,s}(x+y) \geqslant \sup_{w+v=x+y} T(F_{r,u}(w), F_{u,s}(v)) = \tau_T(F_{r,u}, F_{u,s}, x+y)$$

şi teorema este demonstrată.

1.2. Clase speciale de spaţii metrice probabiliste

Vom da acum exemple de spaţii metrice probabiliste care servesc atît la înţelegerea mai bună a conceptului introdus de Menger cît şi la punerea unor probleme din această teorie.

a) *Spaţii echilaterale*

DEFINIŢIA 1.22. Un spaţiu metric probabilist se spune că este echilateral dacă (S, F) are proprietatea că

$$F_{r,s}(x) = \begin{cases} G(x), & r \neq s, \\ H(x), & r = s, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde G este o funcție definită pe R nedescrescătoare, continuă la stînga, $G(0) = 0$ și $\lim_{x \to \infty} G(x) = 1$.

Vom remarca că, dîndu-se un spațiu metric probabilist (S,F) este posibil ca inegalitatea (IV_m) să aibă loc pentru anumite clase de triplete; dacă are loc pentru orice triplet și pentru o anumită alegere a t-normei se spune că are loc universal în raport cu t-norma T.

Referitor la acest fapt putem demonstra următoarea:

TEOREMA 1.23. Dacă (S,F) este un spațiu metric probabilist echilateral atunci au loc următoarele afirmații:

1. Relația (IV_m) are loc pentru orice triplet de puncte distincte pentru t-norma $T(x,y) = \max(x,y)$;

2. Relația (IV_m) are loc universal pentru t-norma $T(x,y) = \min(x,y)$.

Demonstrație. În adevăr, oricare ar fi $x, y \geqslant 0$,

$$G(x+y) \geqslant \max\{G(x), G(y)\} \geqslant \min\{G(x), G(y)\}$$

$$G(x+y) \geqslant \min\{G(x), 1\}$$

și (IV_m) se verifică ușor în forma dată în 1 și 2 respectiv.

TEOREMA 1.24. Orice spațiu metric probabilist echilateral este un spațiu Wald.

Demonstrație. Rezultă imediat din inegalitatea

$$G(x+y) \geqslant \max\{G(x), G(y)\}$$

și din teorema 1.9.

Se poate arăta cu ajutorul unor exemple că pentru un spațiu metric probabilist echilateral, inegalitatea IV_m poate să aibă loc pentru multe t-norme, ca de exemplu $T(x,y) = \min\{x+y,1\}$.

Fie pentru aceasta G o funcție definită prin

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & 1 \leqslant x \end{cases}$$

și spațiul (S,F) echilateral definit ca mai sus; se verifică ușor că

$$G(x+y) \geqslant \min\{G(x) + G(y), 1\}$$

și afirmația făcută pentru spațiul metric echilateral (S,F) este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

O clasă de spaţii metrice aleatoare este introdusă prin:

DEFINIŢIA 1.25. Un spaţiu metric aleator (S,F) este echilateral dacă oricare ar fi $r, s \in S$,

$$\delta_{r,s}(w) = \begin{cases} f(w), & r \neq s, \\ 0, & r = s, \end{cases}$$

unde $f(w)$ este o variabilă aleatoare pozitivă pe $\{E, K, P\}$ cu $E(f(w)) \neq 0$.

b) Spaţii metrice probabiliste simple; spaţii metrice aleatoare simple.

O clasă importantă de spaţii care generalizează direct spaţiile metrice se poate construi utilizînd metrica ρ pe spaţiul metric (S, ρ). În adevăr, fie G o funcţie din Δ^1 şi să punem pentru orice $r, s \in S$,

$$F_{r,s}(x) = \begin{cases} G(x/\rho(r,s)), & r \neq s, \\ H(x), & r = s. \end{cases}$$

În acest caz (S,F) este un spaţiu metric probabilist simplu cu F definit prin

$$(r,s) \to F_{r,s}$$

şi este uşor de văzut că dacă presupunem că ρ este numai cvasi-metrică atunci (S,F) este un spaţiu cvasi-metric probabilist; dacă ρ este o ultrametrică (adică $\rho(x,z) \leqslant \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$ oricare ar fi $x, y, z \in S$) obţinem un spaţiu nearhimedean.

Are loc:

TEOREMA 1.26. Orice spaţiu metric probabilist simplu este un spaţiu Menger pentru orice t-normă T.

Demonstraţie. Fie T o t-normă şi deci avem

$$T(x, y) \leqslant T(x, 1) = x,$$
$$T(x, y) = T(y, x) \leqslant T(y, 1) \leqslant y$$

şi de unde rezultă $T(x, y) \leqslant \min\{x, y\}$. Pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că G din definiţia spaţiului simplu are proprietatea că oricare ar fi $x, y \geqslant 0$ şi oricare ar fi $r, s, u \in S$ avem

$$G\left(\frac{x+y}{\rho(r,s)}\right) \geqslant \min\left\{G\left(\frac{x}{\rho(r,u)}\right), G\left(\frac{y}{\rho(u,s)}\right)\right\},$$

$$G\left(\max\left\{\frac{x}{\rho(r,u)}, \frac{y}{\rho(u,s)}\right\}\right) \geqslant \min\left\{G\left(\frac{x}{\rho(r,u)}\right), G\left(\frac{y}{\rho(u,s)}\right)\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea de considerat două cazuri, după cum metrica ρ este și ultrametrică sau nu respectiv.

Să presupunem că ρ este metrică,

$$\rho(r, s) \leqslant \rho(r, u) + \rho(u, s)$$

de unde rezultă că $(r \neq s)$

$$\frac{x + y}{\rho(r, s)} \geqslant \frac{x + y}{\rho(r, u) + \rho(u, s)}$$

și cum r, s, u sînt distincte avem

$$\max\left\{\frac{x}{\rho(r, u)}, \frac{y}{\rho(u, s)}\right\} \geqslant \frac{x + y}{\rho(r, u) + \rho(u, s)} \geqslant \min\left\{\frac{x}{\rho(r, u)}, \frac{y}{\rho(u, s)}\right\},$$

deducem inegalitatea cerută deoarece funcția este nedescrescătoare.

Să presupunem acum că ρ este chiar ultrametrică,

$$\rho(r, s) \leqslant \max\{\rho(r, u), \rho(u, s)\}$$

de unde deducem că

$$\frac{\max(x, y)}{\rho(r, s)} \geqslant \frac{\max(x, y)}{\rho(r, u) + \rho(u, s)}$$

și de asemenea avem

$$\min\left\{\frac{x}{\rho(r, u)}, \frac{y}{\rho(u, s)}\right\} \leqslant \min\left\{\frac{x}{\rho(r, s)}, \frac{y}{\rho(r, s)}\right\} \leqslant \frac{\max\{(x, y)\}}{\rho(r, s)}$$

și cum G este nedescrescătoare, rezultă inegalitatea care demonstrează că avem un spațiu nearhimedean.

Teorema este astfel demonstrată.

Analogul spațiilor metrice probabiliste simple pentru cazul spațiilor metrice aleatoare îl introducem în:

DEFINIȚIA 1.27. Un spațiu metric aleator se spune simplu dacă există un spațiu metric (S, ρ) astfel ca

$$F_{r,s}(w) = \begin{cases} f(w)\ \rho(r, s), & r \neq s, \\ 0, & r = s \end{cases}$$

și $E(f(w)) = a = 0$.

În mod similar introducem și spațiile metrice aleatoare simple nearhimedeene, lucru pe care îl lăsăm în seama cititorului.

1.3. Spații metrice probabiliste generalizate

O generalizare a noțiunii de spațiu metric probabilist (cvasi-metric) se poate obține utilizînd noțiunea de funcții de probabilitate în sensul lui Kolmogorov.

Fie $\{E, \mathscr{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate complet aditiv și F o mulțime oarecare iar $f: E \to F$ o aplicație arbitrară. Să notăm cu $\mathscr{K}^f$ mulțimea tuturor părților $A \subset F$ astfel ca $f^{-1}(A)$ să fie o mulțime în $\mathscr{K}$.

Se poate verifica ușor că $\mathscr{K}^f$ formează un corp de mulțimi. Pe acest corp după cum se verifică imediat putem defini: o probabilitate P^f prin relația

$$P^f(A) = P(f^{-1}(A))$$

și cum $P^f(F) = 1$ se poate verifica ușor că în adevăr P^f este o probabilitate. Rezultă că putem considera cîmpul de probabilitate $\{F, \mathscr{K}^f, P^f\}$. Probabilitatea P^f se numește, după Kolmogorov, funcția de probabilitate a lui f.

Vom remarca faptul că funcțiile de repartiție F se construiesc cu ajutorul funcțiilor de probabilitate, utilizînd mulțimi speciale,

$$F(a) = P^f((-\infty, a)).$$

Spațiile metrice probabiliste generalizate le introducem prin:

DEFINIȚIA 1.28. Un spațiu metric probabilist, generalizat este $\{S, \mathscr{P}^f, F, \mu\}$ unde S este o mulțime arbitrară, $\mathscr{P}^f$ este o famillie de funcții de probabilitate, μ este o măsură pe F și există o aplicație a mulțimii $S \times S$ în $\mathscr{P}^f$ cu următoarele proprietăți:

1) $P^f_{p,q}(A) = 1 \quad \text{cu} \quad \mu(A) > 0 \Leftrightarrow p = q,$

2) $P^f_{pq} = P^f_{qp},$

3) $\mu(A) = 0, \quad P^f_{pq}(A) = 0,$

4) $P^f_{pq}(A) = 1, \quad P^f_{qr}(B) = 1 \Rightarrow P^f_{pr}(A \cup B) = 1.$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $F = R^1$ şi μ măsura exterioară construită cu ajutorul funcţiei crescătoare,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0, \end{cases}$$

cu ψ strict crescătoare pe R_+, vom obţine o generalizare simplă a spaţiilor metrice probabiliste.

Axioma 4 de mai sus, poate fi înlocuită, cum a fost făcut şi în cazul spaţiilor metrice probabiliste cu alte inegalităţi. Vom indica acum cum poate fi făcut acest lucru.

Introducem acum axioma de spaţiu Menger generalizat

$$\text{IV}_m) \qquad P^f_{pr}(A \cup B) \geqslant T(P^f_{p,q}(A),\ P^f_{q,r}(B))$$

unde T este o t-normă.

Să presupunem acum că F este un grup abelian local compact şi $\mathscr{P}$ este o familie de funcţii de probabilitate. Este cunoscut că, dacă μ şi ν sînt două măsuri pe un grup abelian local compact se poate defini produsul de convoluţie $\mu * \nu$ prin

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(E_2),$$

unde $E = \{(x, y),\ x + y \in E\}$ iar $\mu \times \nu$ este măsura produs a celor două măsuri μ şi ν. Se poate arăta uşor că

$$\mu * \nu = \nu * \mu.$$

Axioma pentru definirea clasei de spaţii Wald generalizate o introducem prin

$$P^f_{pr}(A) \geqslant (P^f_{pq} * P_{qr})(A)$$

oricare ar fi $p, q, r \in S$ şi A, $\mu(A) > 0$.

Pentru proprietăţi ale acestor spaţii a se vedea [66].

2 | t-Norme

În acest capitol se studiază o clasă specială de funcţii definite pe pătratul $[0,1] \times [0,1]$ şi cu valori în $[0,1]$, avînd anumite proprietăţi speciale. Un rezultat important este stabilirea teoremei de structură pentru aceste funcţii.

De asemenea sînt date rezultate privind unele relaţii ale acestor funcţii şi spaţiile metrice probabiliste.

2.1. Definiţii şi proprietăţi simple

DEFINIŢIA 2.1. O t-normă T este o funcţie pe $I \times I$ cu valori în I unde $I = [0,1]$ şi care posedă următoarele proprietăţi :

1) $T(a, 1) = a$,

2) $T(a, b) \leqslant T(a', b')$ dacă $a \leqslant a'$ şi $b \leqslant b'$,

3) $T(a, b) = T(b, a)$,

4) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$.

Înainte de a da cîteva dintre cele mai simple proprietăţi ale t-normelor vom da exemple de t-norme şi care au o importanţă deosebită.

α) Min, $\operatorname{Min}(a, b) = \begin{cases} a, & a \leqslant b, \\ b, & b \leqslant a. \end{cases}$

β) Prod, $\operatorname{Prod}(a, b) = ab$.

γ) T_m, $T_m(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

$\delta)\mathrm{T}_w$, $T_w(a, b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$

Are loc:

TEOREMA 2.2. Dacă T este o t-normă, $T(0, 0) = 0$.

Demonstrație. În adevăr, cum avem

$$0 \leqslant T(0,0) = T(0,1) = 0$$

și deci afirmația este demonstrată.

Dăm acum următoarea:

DEFINIȚIA 2.3. O t-normă T_1 este mai tare decît t-norma T_2 și vom scrie $T_1 \geqslant T_2$ dacă oricare ar fi $(a, b) \in I \times I$,

$$T_2(a, b) \leqslant T_1(a, b).$$

Are loc:

TEOREMA 2.4. Oricare ar fi t-norma T avem

$$T_w \leqslant T \leqslant \mathrm{Min}.$$

Demonstrație. Fie T o t-normă. Din

$$T(a, b) < T(a, 1) = a,$$

$$T(a, b) = T(b, a) < T(b, 1) = b$$

și deci

$$T\ (a, b) \leqslant \mathrm{Min}(a, b)$$

de unde $T \leqslant \mathrm{Min}$. Să arătăm că are loc și inegalitatea $T_w \leqslant T$. Este suficient pentru aceasta să considerăm numai cazul cînd a sau b sînt egale cu 1 căci în caz contrar

$$T(a, b) \geqslant T_w(a, b) = 0.$$

Fie deci $a = 1$ și b arbitrar. În acest caz avem

$$T(1, b) = T(b, 1) = b = T_w(a, b)$$

și cazul în care $b = 1$ fiind similar, teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Vom mai observa că relaţia de ordine definită în 2.2 este o relaţie de ordine parţială în mulţimea $\mathcal{M}$ a t-normelor. O problemă interesantă este următoarea : în ce condiţii mulţimii $\mathcal{M}$ i se poate aplica lema lui Zorn ?

Vom arăta mai tîrziu că $\mathcal{M}_1 = \{T, T \in \mathcal{M}, T$ continue la stînga$\}$ posedă această proprietate.

2.2. Teoreme de structură

O problemă importantă în teoria funcţiilor de mai multe variabile este problema compunerii lor în sensul de a obţine funcţii de mai multe variabile cu ajutorul funcţiilor de un număr mai mic de variabile. Aceasta este o problemă legată de numele lui Hilbert şi vom menţiona problema a treisprezecea a lui Hilbert : nu orice funcţie continuă de trei variabile este compunerea unor funcţii continue de două variabile. Hilbert a conjecturat această afirmaţie care a fost infirmată de Arnold şi Kolmogorov. Vom menţiona că un prim rezultat privind compunerea funcţiilor este datorat lui Sierpinski şi are următorul enunţ : orice funcţie de două variabile F se poate reprezenta sub forma

$$F(x, y) = g(h(x) + k(y))$$

unde g, h, k sînt funcţii de o variabilă. Se poate arăta că dacă F este simetrică ($F(x, y) = F(y, x)$) atunci în reprezentarea de mai sus putem lua $h = k$.

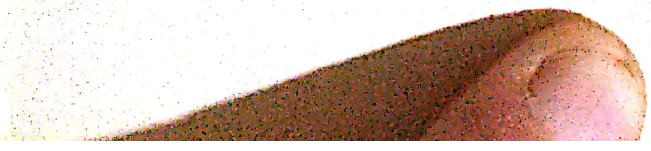
Este natural să se pună problema reprezentării funcţiilor F în cazul cînd satisfac şi alte condiţii suplimentare. O astfel de condiţie suplimentară este proprietatea de asociativitate a funcţiei F,

$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)).$$

Un rezultat în această direcţie a fost obţinut de Abel în 1828, în condiţii restrictive, şi anume că

$$F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$

unde f este continuă şi strict monotonă iar f^{-1} este inversa funcţiei f. Acest rezultat a fost extins de Brouwer şi Cartan la o clasă mai largă de funcţii. Într-un cadru abstract rezultate generale au obţinut Aczel, Foucett, Wallace, Mostert, Shields şi Ling.



Scanned with OKEN Scanner

Pentru formularea teoremei de structură vom avea nevoie de cîteva noţiuni introduse de Schweizer şi Sklar.

DEFINIŢIA 2.5. Dacă $f : A \to B$ şi $g : A_1 \to B_1$, se spune că g este subinversa dreaptă a funcţiei f dacă

$$1)\ A_1 = B, \qquad B_1 \subset A,$$
$$2)\ f \circ g = i_B, \qquad i_B(\xi) = \xi,\ \forall \xi \in B.$$

Este uşor de văzut că orice funcţie f este invertibilă sau are cel puţin o subinversă la dreapta.

DEFINIŢIA 2.6. Un neutralizator la stînga al funcţiei $f : A \to B$ este o funcţie $g : A_1 \to B_1$ astfel încît $g \circ f$ are sens şi este funcţia identitate.

DEFINIŢIA 2.7. Dacă $f : [a, b] \to [0, \infty]$ este continuă şi descrescătoare (strict) atunci pseudo-inversa funcţiei f este funcţia $f^{(-1)}$ definită prin

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} b, & x \in [0, f(b)], \\ f^{-1}(x), & x \in [f(a), f(b)], \\ a & x \in [f(a), \infty], \end{cases}$$

care este continuă şi nedescrescătoare.

De asemenea

$$f^{(-1)} \circ f = i_{[a,b]}.$$

Cu ajutorul următoarei definiţii introducem o clasă importantă de t-norme.

DEFINIŢIA 2.8. O t-normă T se spune că este arhimedeană dacă este continuă şi

$$T(x, x) < x$$

oricare ar fi $x \in (0,1)$.

DEFINIŢIA 2.9. O t-normă T se spune că este strictă dacă este continuă şi oricare ar fi $a \in (0,1]$ şi $x_1 < x_2$

$$T(x_1, a) < T(x_2, a).$$

Scanned with OKEN Scanner

Are loc următoarea teoremă simplă:

TEOREMA 2.10. Orice t-normă strictă este arhimedeeană.

Demonstrație. Dacă nu ar fi așa, ar rezulta că există $x_0 \in (0,1)$ astfel ca

$$T(x_0, x_0) = x_0 = T(x_0, 1)$$

care este imposibilă.

Vom remarca faptul că t-norma

$$T(a, b) = ab$$

este strictă, de asemenea

$$T(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\}$$

este arhimedeeană.

Următoarea *teoremă fundamentală* obținută de C. H. Ling dă structura unei clase vaste de t-norme.

TEOREMA 2.11. Fie $[a, b]$ un interval al dreptei reale extinse și

$$A : [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

o funcție asociativă cu următoarele proprietăți:

1) A este continuă,
2) A este strict descrescătoare în fiecare variabilă,
3) pentru orice $x \in [a, b]$ avem $A(b, x) = x$,
4) $A(x, x) < x, \forall x \in (a, b)$.

În acest caz există o funcție continuă $f : [a, b] \to [0, \infty]$ cu $f(b) = 0$, astfel încît

$$A(x, y) = f^{(-1)}\ (f(x) + f(y)),$$

unde $f^{(-1)}$ este pseudo-inversa funcției f.

În lucrarea sa [38], Ling numește semigrup arhimedean, orice semigrup care satisface condițiile 1—4. Este clar că teorema de mai sus arată că semigrupul arhimedeean considerat este comu-

Scanned with OKEN Scanner

tativ. Scopul nostru este de a prezenta o demonstrație elementară a acestei teoreme dată de Ling; este cunoscut că această teoremă se poate obține ca un caz particular al unor rezultate din teoria semigrupurilor.

DEFINIȚIA 2.12. Dacă T este o t-normă arhimedeeană cu reprezentarea

$$T(x, y) = f^{(-1)}\,(f(x) + f(y)),$$

f fiind continuă și descrescătoare pe $[0,1] \to [0, \infty]$ cu $f(1) = 0$, $f^{(-1)}$ pseudo-inversul lui f, funcția f din această reprezentare se spune că este generatorul aditiv al t-normei arhimedeene T.

Este clar că avem relația

$$f \circ f^{(-1)}\,(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant f(0), \\ f(0), & x \geqslant f(0). \end{cases}$$

Să dăm unele exemple. Dacă $T(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$ atunci generatorul său aditiv este

$$f(x) = 1 - x$$

deoarece avem

$$f^{(-1)}\,(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 1, \\ 0, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

și deci

$$f^{(-1)}(f(x) + f(y)) = f^{(-1)}\,(1 - x + 1 - y) = \max(x + \\ + y - 1, 0) = T(x, y).$$

De asemenea generatorul aditiv pentru $T(a, b) = ab$ este funcția

$$f(x) = \lg x.$$

Se pune în mod natural problema dacă orice t-normă admite un generator aditiv. Un exemplu de t-normă care nu admite generator aditiv este dat de t-norma

$$T(a, b) = \min\{a, b\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom remarca un fapt curios în sine și anume că funcția

$$T_w(a, b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

admite o reprezentare de forma

$$g(f(x) + f(y)).$$

În adevăr, să luăm

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

și atunci un calcul simplu arată că

$$T_w(x, y) = g(f(x) + f(y)).$$

Fie deci $S : [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$ și să punem pentru orice întreg n și $x \in [a, b]$,

$$x^n = S(x^{n-1}, x), n > 1.$$

Are loc:

TEOREMA 2.13. Pentru orice întreg n, $x^{n+1} \geqslant x^n$ și oricare ar fi x, y există N astfel ca $x^N > y$.

Înainte de a începe demonstrația vom remarca faptul că afirmația a doua din teoremă justifică cuvîntul arhimedeean.

Demonstrație. Prima afirmație se demonstrează astfel: pentru orice întreg n

$$x^{n+1} = S(x^n, x) \geqslant S(x^n, a) = x^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

A doua afirmație o demonstrăm prin reducere la absurd. Să presupunem deci că afirmația este falsă. În acest caz pentru orice întreg n avem

$$x^n \leqslant y$$

și cum șirul $\{x^n\}$ este monoton, fie $\tilde{x} = \lim x^n$. Evident că

$$a \leqslant \tilde{x} \leqslant y$$

și deci

$$\tilde{x}^2 = \tilde{x} \cdot \tilde{x} = \lim (x^n) \lim (x^n) = \lim x^{2n} = \tilde{x}$$

care contrazice condiția 4).

De asemenea are loc:

TEOREMA 2.14. Pentru orice $x \in (a, b)$, $\lim x^n = b$.

Demonstrație. Dacă $\lim x^n = \tilde{x} \neq b$ avem $x^{n+} > \tilde{x}$ pentru un anume întreg n^* și cum $\{x^n\}$ este monoton avem o contradicție și teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.15. Punctul b are proprietatea că

$$b \cdot x = x \cdot b = b, \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstrație. Dacă $x \in (a, b)$ atunci cum $b = \lim x^n$, rezultă că

$$x \cdot b = \lim x \cdot x^n = \lim x^{n+1} = b,$$

$$b \cdot x = \lim x^n \cdot x = \lim x^{n+1} = b.$$

Dacă $x = a$ conform cu condiția 3),

$$a \cdot b = b$$

și

$$b \cdot a = \lim_{x \to a} b \cdot x = \lim (b) = b.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a stabili alte proprietăţi vom avea nevoie de cîteva definiţii.

DEFINIŢIA 2.16. Un punct $e \in [a, b]$ se spune idempotent dacă

$$e^2 = e$$

şi un punct x se spune nilpotent dacă pentru un anumit întreg n, x^n este anihilator, adică oricare ar fi y avem

$$x^n y = x^n = y x^n.$$

TEOREMA 2.17. 1) Punctul a are proprietatea că

$$a \cdot x = x \cdot a = x \quad \forall x \in [a, b].$$

2) $\forall x, y \in (a, b)$ atunci $xy > y$ şi $yx > y$,

3) $\forall x, y \in [a, b]$ şi $x < y$ există z_1, z_2 astfel încît

$$y = xz_1, \; y = z_2 x.$$

Demonstraţie. Să considerăm $f(x) = x \cdot a$ care are proprietatea că $f(a) = a$ şi $f(b) = b$ şi fiind continuă pentru orice $y_0 \in [a, b]$ există x_0 astfel ca $f(x_0) = y_0$. Deci $y_0 \in [a, b]$ este de forma $y_0 = x_0 \cdot a$, de unde

$$x_0 \cdot a = (x_0 \cdot a)\, a = x_0\, (a \cdot a) = x_0 \cdot a = y_0$$

şi prima afirmaţie este demonstrată.

Să demonstrăm 2). Este suficient să demonstrăm prima relaţie; a doua demonstrîndu-se la fel.

În adevăr, avem

$$x \cdot y \geqslant a \cdot y = y.$$

Să arătăm că nu poate avea loc relaţia $x \cdot y = y$. Să presupunem că este aşa şi deci, conform teoremei 2.13, există N astfel ca $x^N > y$, de unde

$$y < x^N = x^N \cdot a \leqslant x^N \cdot y = y,$$

Scanned with OKEN Scanner

care reprezintă o contradicție și afirmația este demonstrată.

Să demonstrăm acum 3). Fie funcția $f(z) = x \cdot z$ cu z fix. Cum $f(a) = x \cdot a = x$, iar $f(b) = b \cdot z = b$ și $x < b$, atunci orice valoare între x și b este o valoare a funcției f, deci y este de forma

$$y = xz_1.$$

Similar se demonstrează cealaltă afirmație considerînd funcția

$$f(z) = zx.$$

Teorema este astfel demonstrată.

TEOREMA 2.18. Dacă $x^n < y$ și $x^n < b$ atunci $x^n < y^n$.

Demonstrație. Să presupunem că teorema nu este adevărată. În acest caz există x_0 și y_0 astfel ca pentru un anumit întreg x_0, avem

$$x_0^{n_0} < y_0, \quad x_0^n < b, \quad x_0^n = y_0^n.$$

Din teorema 2.17 rezultă că există z astfel ca

$$y_0 = x_0 z$$

și deci

$$b > x_0^n = y_0^n = y_0^{n-1} \cdot y_0 = y_0^{n-1} (x_0 z) = (y_0^{n-1}, x_0) z \geqslant$$

$$\geqslant (x_0^{n-1} \cdot x_0) z = x_0^n \cdot z > a_0^n,$$

care este o contradicție și teorema este astfel demonstrată.

De asemenea putem demonstra și:

TEOREMA 2.19. Au loc următoarele afirmații:

1) pentru orice $x \in (a, b)$ și $a^n < b$ are loc relația $a^n < x^{n+1}$,
2) fie $x \in [a, b]$ și $R_n(x) = \{y, y \in [a, b], y^n = x\}$. În acest caz $R_n(x)$ are un cel mai mic element.
3) funcția

$$x \to r_n(x) = \min R_n(x)$$

este continuă și crescătoare; r_n este subinversa dreaptă a funcției $x \to x_n = s_n$,

4) dacă $x \in (a, b)$, $r_n(x) > r_{n+1}(x)$, $\forall n$,

5) $\lim r_n(x) = a$, $\forall x \in (a, b)$,

6) $s_m r_n(x) = s_{im} r_{in}$ $\forall i, n, m$.

Demonstrație.

1) Dacă punem în teorema 2.18, $y = x^n$ obținem afirmația făcută.

2) Fie $s_n(x) = x^n$, care este o funcție continuă și după cum este ușor de văzut

$$s_n(a) = a,$$

$$s_n(b) = b$$

și deci orice valoare între a și b este de forma $s_n(x_0)$ cu $x_0 \in [a, b]$ de unde rezultă că orice $x_0 \in [a, b]$ se poate scrie sub forma

$$x_0 = y_0^u$$

cu $y_0 \in [a, b]$. Dacă $\tilde{x}$ este infimumul mulțimii $R_n(x)$ să luăm $y_m \to \tilde{x}$ cu $y_m \in R_n(x)$. Deci, cum avem

$$s_n(y_m) = x,$$

$$\lim s_n(y_m) = s(\tilde{x}),$$

deducem că trebuie să avem și

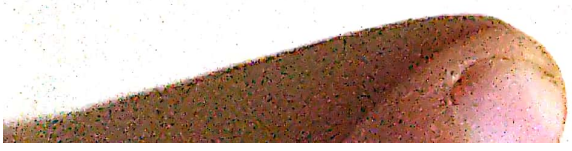
$$s_n(\tilde{x}) = x$$

și afirmația este demonstrată.

3) Cum r_n este definită pe $[a, b]$ și cu valori în $[a, b]$ fiind funcție „pe" și cum $s_n(r_n(x)) = x$ oricare ar fi $x \in [a, b]$ rezultă de aici că r_n este subinversa dreaptă a funcției s_n. Cum s_n este continuă și crescătoare pe $[a, r_n(b)]$ rezultă că

$$r_n(x) : [a, b] \to [a, r_n(b)]$$

este inversa la dreapta a funcției s_n și este continuă și crescătoare.



Scanned with OKEN Scanner

4) Să presupunem că afirmația este falsă și deci există $x_0 \in (a, b)$ astfel ca

$$a < r_n(x_0) \leqslant r_{n+1}(x_0) < b$$

și deci

$$a < s_n r_n(x_0) \leqslant s_n r_{n+1}(x_0) < b$$

de unde

$$a < x_0 < s_n r_{n+1}(x_0) < s_{n+1} r_{n+1}(x_0) = x_0,$$

care este o contradicție. Afirmația este demonstrată.

5) Cum $r_{n+1} < r_n(x)$ fie $\tilde{x} = \lim r_n(x)$ care are proprietatea că $\tilde{x} < r_n(x)$ oricare ar fi n. Dar atunci avem și $\tilde{x}^n \leqslant x$ care ne dă $\tilde{x} = a$ și afirmația este demonstrată.

6) Demonstrăm afirmația tot prin reducere la absurd. Deci dacă afirmația este falsă, există i, n, m și x_0 astfel ca

$$s_m r_n(x_0) \neq s_{im} r_{in}(x_0).$$

Fie $r_n(x_0) = y_0$ și $r_{in}(x_0) = z_0$. Deci $y_0^n = x_0$ și $z_0^{in} = x_0$, de unde rezultă că sînt în mulțimea $R_n(x_0)$ și deci, conform definiției funcției $r_n(x)$ avem

$$y_0 \leqslant z_0^i$$

deoarece $y_0^m \leqslant z_0^{im}$. Cum însă $y_0^m \neq z_0^{im}$ și deci $y_0^m \leqslant z_0^{im}$, $y_0 < z_0^i$.

Cum $x \to s_i(x)$ este continuă și $s_i(a) = a$, $s(z) = z^i$ de unde rezultă că există $w \in (a, z)$ astfel ca $y_0 = w^i$ deoarece $y_0 \in (a, z^i)$.

Cum însă

$$w^{in} = y_0^n = x_0,$$

avem $w \in R_{in}(x_0)$ și $w < z_0$, ceea ce contrazice definiția lui z_0. Afirmația este astfel demonstrată și cu aceasta teorema.

Teoremele demonstrate pînă acum ne permit să dăm *demonstrația teoremei fundamentale de structură* (teorema 2.10).

Fie Q mulțimea numerelor raționale și pentru c fix în (a, b) să punem

$$g^*(m/n) = s_m r_n(c)$$

care conform teoremei 2.18 punctul 6) este o funcție bine definită pe Q cu valori în $[a, b]$. Să stabilim acum cîteva proprietăți utile în cele ce urmează ale funcției g^*.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţi ale funcţiei g^* :

1° g^* este nedescrescătoare,
2° $x < y$ şi $g^*(y) < b \Rightarrow g^*(x) < g^*(y)$,
3° $g^*(x)\, g^*(y) = g^*(x + y)$,
4° g^* este continuă.

Să demonstrăm aceste proprietăţi. Fie deci x, y în Q şi

$$x = \frac{m}{d}, \quad y = \frac{n}{d},$$

În acest caz dacă $x < y$ atunci $m < n$ de unde rezultă că

$$g^*(x) = g^*\left(\frac{m}{d}\right) = s_m\, r_d(c) \leqslant s_n\, r_d(c) = g^*\left(\frac{n}{d}\right) = g^*(y)$$

şi prima proprietate este demonstrată.

Proprietatea a doua se demonstrează astfel : fie $x = \frac{m}{d}$, $y = \frac{n}{d}$ şi atunci dacă $x < y$, $m < n$ şi din $g^*(x) < b$ deducem că

$$g^*(x) = s_m\, r_n(c) < s_{m+1}\, r_d(c) \leqslant s_n\, r_d(c) = g^*(y).$$

Cum avem

$$g^*(x)\, g^*(y) = s_m\, r_d(c)\, s_n(r_d(c)) = s_{m+n}\, r_d(c) = g^*(m + \\ + n/d) = g^*(x + y)$$

şi proprietatea 3° este demonstrată.

Cum g^* este monotonă, este suficient să arătăm de exemplu că

$$\lim g^*\left(x + \frac{1}{n}\right) = g^*(x),$$

$$\lim g^*\left(x - \frac{1}{n}\right) = g^*(x).$$

Vom justifica numai prima afirmaţie. Cealaltă se demonstrează similar.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\lim g^* \left(\frac{1}{n}\right) = g^* (0) = a$$

deoarece

$$\lim_{n \to \infty} g^* \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} r_n (c) = a.$$

Dar cum

$$g^* \left(x + \frac{1}{n}\right) = g^* (x)\, g^* \left(\frac{1}{n}\right)$$

deducem că

$$\lim g^* \left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim g^* (x)\, g^* \left(\frac{1}{n}\right) = g^* (x)\, a = g^* (x).$$

Cum g^* este continuă și are proprietățile 1°—4°, funcția $g : R \to a, b$ care extinde prin continuitate funcția g^* are de asemenea proprietățile 1°—4°. Dacă B este primul punct în care $g(B) = b$ atunci

$$g : [0, B] \to [a, b]$$

este un omeomorfism. Avem

$$g (x)\, g (y) = g (x + y)$$

dacă punem

$$u = g (x), \quad v = g (y),$$

atunci $u, v \in [0, B]$ și $x = f(u)$, $y = f(v)$, ecuația de mai sus ne dă

$$u \cdot v = g (f (u) + f (v)) = A (u, v)$$

și g este pseudo-inversa lui f iar f este un generator aditiv. Teorema de structură este astfel demonstrată.

Vom remarca faptul că în diferite aplicații este convenabil să avem versiunea duală a teoremei fundamentale de structură. Acest lucru îl dăm în:

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 2.20. Fie $[a, b]$ pe dreapta reală extinsă și

$$S : [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

o funcție asociativă care posedă următoarele proprietăți :

1) S este continuă,
2) S este crescătoare în ficcare variabilă,
3) $b \cdot x = b \; \forall x \in a, b$,
4) oricare ar fi $x \in (a, b)$, $S(x, x) < x$ adică $x \cdot x = x^2 < x$.

În acest caz există o funcție $f : [a, b] \to R$ astfel ca

$$S(x, y) = g(f(x) + f(y)),$$

unde g este pseudo-inversul funcției f.

Demonstrație. Fie $h : [a, b] \to [a, b]$ un omeomorfism, iar k inversul său și să definim

$$T(x, y) = kS(h(x), h(y))$$

care satisface condițiile din teorema fundamentală de structură și deci

$$T(x, y) = g(f(x) + f(y)),$$

de unde rezultă că S are generatorul $fk : [a, b] \to R$,

$$S(u, v) = hg(fk(u) + fk(v))$$

iar hg este pseudo-inversul lui fk. Teorema este astfel demonstrată.

Observație. Se poate arăta că teorema 2.20 este în fapt echivalentă cu teorema fundamentală de structură.

Menționăm de asemenea că are loc și :

TEOREMA 2.21. Fie $[a, b]$ un interval pe dreapta extinsă și $f : [a, b] \to R$ continuă și crescătoare iar $g : R \to [a, b]$ pseudo-inversa sa. Atunci

$$S(x, y) = g(f(x) + f(y))$$

verifică cele 4 condiții 1°—4° din teorema fundamentală de structură.

Scanned with OKEN Scanner

Vom remarca faptul că rezultatul din 2.20 a fost obținut de B. Schweizer și A. Sklar în termeni de t-norme.

Teorema se aplică la t-norme arhimedeene și ne dă următoarea :

TEOREMA 2.22. Dacă T este o t-normă arhimedeeană există $f : I \to R$ continuă și descrescătoare astfel ca

$$T(x, y) = g(f(x) + f(y))$$

unde $g : R \to I$ este pseudo-inversa funcției f cu $f(1) = 0$.

Demonstrație. Reprezentarea rezultă imediat. Să arătăm că $f(1) = 0$. În adevăr, să punem $f(1) = w$ și $f(0) = z$. Cum

$$1 = T(1,1) = g(f(1) + f(1)) = g(2w)$$

rezultă că $g(2w) \in [0,w]$ dacă și numai dacă $w = 0$.

Vom arăta acum că nu orice t-normă este reprezentabilă prin formule de tipul de mai sus.

Fie pentru aceasta t-norma $T = \text{Min}$ definită prin

$$T(a, b) = \min(a, b)$$

care nu satisface condiția $x^2 < x$ și deci nu are un generator. Vom menționa faptul că Arnold și Kirilov au arătat că funcția Min nu admite reprezentarea

$$g(h(x) + k(y))$$

unde g, k, h sînt funcții continue.

Vom da acum cîteva teoreme privind t-normele arhimedeene.

DEFINIȚIA 2.23 Fie T o t-normă arhimedeeană și f, g doi generatori aditivi ai acesteia. În acest caz există $\lambda > 0$ astfel ca

$$g = \lambda f.$$

Demonstrație. Să presupunem că au loc relațiile

$$T(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci avem și relațiile

$$f(x) + f(y) \in [0, f(0)) \Leftrightarrow f^{(-1)}(f(x) + f(y)) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g^{(-1)}(g(x) + g(y)) > 0 \Leftrightarrow g(x) + g(y) \in [0, g(0)).$$

Să presupunem că x și y sînt astfel ca $f(x) + f(y) \in [0, f(0))$ și deci cum $f^{(-1)} = f^{-1}$ pe $[0, f(0))$, $g^{(-1)} = g^{-1}$ pe $[0, g(0))$ deducem că are loc relația

$$f^{(-1)}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = g^{(-1)}(g(x) + g(y)) =$$
$$= g^{-1}(g(x) + g(y)).$$

Să punem

$$u = f(x), \quad v = f(y)$$

și deci $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$ de unde

$$f^{-1}(u + v) = g^{-1}(g(f^{-1}(u)) + g(f^{-1}(v))).$$

Obținem astfel

$$gf^{-1}(u + v) = gf^{-1}(u) + gf^{-1}(v)$$

și deci funcția continuă gf^{-1} satisface pe $[0, f[0)]$ ecuația funcțională a lui Cauchy

$$F(x + y) = F(x) + F(y)$$

cu F continuă. Deci F este de forma $F(x) = \lambda x$, adică

$$gf^{-1} = j,$$

unde $j(x) = x$ pe $[0, f(0)]$. Numărul λ este pozitiv deoarece f și g sînt pozitive. Faptul că, dacă $\lambda f = g$ cu g generator atunci și f este evident. Teorema este astfel demonstrată.

Apare în mod natural problema caracterizării t-normelor T care sînt continue. Această caracterizare este dată în:

TEOREMA 2.24. Dacă T este o t-normă continuă atunci există descompunerea

$$I \times I = J \times J \cup C_{J \times J}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel ca pe $J \times J$, T este determinată de un semigrup arhimedeean iar pe $C_{J\times J}$ este determinată de t-norma = Min.

Demonstrație. Fie

$$E = \{x,\ x \in [0,1],\ T(x, x) = x\}$$

care este o submulțime închisă în $I = [0,1]$ și deci complementara sa fiind o mulțime deschisă este reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise J_k (disjuncte). Fie deci $\overline{J}_k = [e, f]$ și deci pentru orice $x,\ y \in J_k$ avem

$$e = T(e, e) \leqslant T(x, y) \leqslant T(f, f) = f$$

de unde rezultă că $T(x, y) \in \overline{J}_k$. Dacă $x \in [0, f]$ cum T este continuă și $T(f, 0) = 0,\ T(f, f) = f$ iar

$$\xi \to T(f, \xi)$$

este de asemenea continuă, deducem că există z astfel ca

$$x = T(f, z).$$

Obținem în acest mod că

$$x = T(f, z) = T(T(f, f), z) = T(f, T(f, z)) = T(f, x) = x$$

și deci f este unitate la stînga pentru $(\overline{J}_k, T)$. Cum însă $\overline{J}_k$ nu conține în interior idempotenți (elemente ale mulțimii E) și T = Min este cea mai tare t-normă posibilă avem că

$$T(x, x) < x$$

oricare ar fi $x \in \overline{J}_k$. Rezultă că pe $\overline{J}_k$, T este arhimedeană. Deci pe $J = \bigcup_k J_k \times J_k$, T este determinată. Să considerăm $I \times I - J$. Fie $e \in E$ și $x \in [e, 1]$,

$$e = T(e, e) \leqslant T(e, x) \leqslant T(e, 1) = e$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că e este un zero la stînga pentru T. Fie acum $(x, y) \in I^2 - J$ cu $x < y$ și deci

$$T(x, y) = T(T(x, e), y) = T(x, T(e, y)) = T(x, e) = x = \\ = \text{Min}(x, y).$$

Rezultă astfel că T este determinată de funcții arhimedeene și de t-norma $T = \text{Min}$. Teorema este demonstrată.

Teorema următoare este versiunea multiplicativă a teoremei fundamentale de structură a t-normelor.

TEOREMA 2.25. Dacă T este o t-normă arhimedeană atunci există h continuă și crescătoare pe $I = [0,1]$, $h(1) = 1$ astfel ca oricare ar fi $(x, y) \in I \times I$ să avem

$$T(x, y) = h^{-1}(h(x) \cdot h(y)), \tag{2.26.1}$$

unde h^{-1} înseamnă restricția funcției $h^{(-1)}$ la intervalul I. Reciproc, orice funcție T de forma (2.26.1) este o t-normă arhimedeeană.

Demonstrație. Conform teoremei fundamentale de structură, există generatorul aditiv f și să punem $h = e^{-f}$ și $h^{-1}(t) = f^{(-1)}(-\lg t)$. În acest caz h este o funcție continuă crescătoare pe I și cu $h(1) = 1$ iar $h(0) = e^{-f(0)}$ iar h^{-1} este restricția funcției $h^{(-1)}$ la I. Deci

$$T(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) = h^{-1}(e^{-f(x)-f(y)}) = \\ = h^{-1}(e^{\lg(h(x))+\lg(h(y))}) = h^{-1}(h(x) \cdot h(y))$$

și teorema este demonstrată deoarece o funcție ca (2.26.1) ne dă o t-normă.

Menționăm că funcția h care apare în teorema de structură de mai sus se mai numește și generator multiplicativ al t-normei T. De asemenea se poate demonstra ușor că analogul teoremei 2.22 are loc pentru generatorii multiplicativi.

TEOREMA 2.26. Dacă T este o t-normă arhimedeană și h_1, h_2 sînt doi generatori multiplicativi pentru T atunci există $\lambda > 0$ astfel ca

$$h_1 = h_2^{\lambda}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Importanţa teoremei fundamentale (în forma aditivă sau multiplicativă) constă de asemenea şi în posibilitatea de a construi t-norme folosind generatorii aditivi sau multiplicativi. De exemplu, funcţiile

$$h_p(x) = e^{\left(\frac{1}{p}(1-x^{-p})\right)}, \quad p \neq 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$h_0(x) = x = \lim_{p \to 0} h_p(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

sînt generatori multiplicativi şi

$$T_p(x, y) = \begin{cases} (x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-1/p}, & p > 0, \\ xy, & p = 0, \\ \max\{x^{-p} + y^{-p} - 1, 0\}, & p < 0, \end{cases}$$

Vom remarca faptul că putem considera şi generatorii aditivi corespunzători $f_p = -\lg(h_p)$ şi să construim funcţiile de reprezentare corespunzătoare.

În studiul spaţiilor metrice probabiliste este uneori convenabil să studiem spaţiul cu ajutorul unei noi funcţii construită cu t-norma corespunzătoare T şi anume funcţia definită astfel

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y). \tag{2.27.1}$$

Definiţia 2.27. Dacă T este o t-normă atunci funcţia S definită prin (2.26.1) este numită t-conormă.

Are loc:

Teorema 2.28. Dacă S este o t-conormă corespunzătoare t- normei T atunci au loc următoarele afirmaţii:

1. $S(a, 0) = a$,
2. $S(c, d) \geqslant S(a, b)$, $c \geqslant a$, $d \geqslant b$,
3. $S(a, b) = S(b, a)$.
4. $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$,
5. $T(a, b) = 1 - S(1 - a, 1 - b)$,
6. Dacă $T(x, x) < x$ atunci $S(x, x) > x$ şi deci S este arhimedeană dacă şi numai dacă T este arhimedeană,

Scanned with OKEN Scanner

7. T este strictă dacă şi numai dacă S este strictă,

8. S_1 este mai tare decît S_2 dacă şi numai dacă T_1 este mai slabă decît T_2.

Utilizînd teoremele de structură pentru t-norme arhimedeene se pot obţine teoreme de structură pentru t-conorme. Pentru exemplificare vom menţiona numai:

TEOREMA 2.29. O t-normă S este arhimedeană dacă şi numai dacă admite reprezentarea

$$S(x, y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$$

unde g este continuă şi crescătoare pe $[0,1]$ cu valori în $[0, \infty]$ şi $g(0) = 0$ iar $g^{(-1)}$ este pseudoinversa sa.

Pentru demonstraţie este suficient să punem

$$g(x) = f(1 - x),$$

unde f este generatorul aditiv al t-normei T.

Este natural să ne punem problema cum se poate transforma inegalitatea lui Menger (IV_m) în cazul cînd T este o t-normă arhimedeană utilizînd generatorul aditiv f. În acest sens are loc:

TEOREMA 2.30. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T arhimedeană atunci inegalitatea IV_m se poate scrie sub forma

$$f(F_{pr}(x + y)) \leqslant f(F_{pq}(x)) + f(F_{qr}(y)).$$

Demonstraţie. Dacă f este generatorul aditiv al lui T atunci

$$F_{pr}(x + y) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) = f^{(-1)}(fF_{pq}(x) + fF_{qr}(y))$$

şi aplicînd f care este descrescătoare şi $ff^{(-1)}(t) \leqslant t$ deducem relaţia cerută.

Fie acum T o t-normă iar S conorma corespunzătoare, atunci

$$F_{pr}(x + y) \geqslant 1 - S(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y))$$

care ne dă

$$G_{pr}(x + y) \leqslant S(G_{pq}(x), G_{qr}(y))$$

unde am pus, pentru orice funcţie de repartiţie F, $G = 1 - F$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3. t—norme şi spaţii metrice probabiliste

În următoarea definiţie introducem o clasă de t-norme strîns legate de spaţiul metric probabilist (S, F).

DEFINIŢIA 2.31. O t-normă T este optimală pentru spaţiul metric probabilist (S, F), dacă (S, F) este un spaţiu Menger de t-normă T şi dacă pentru orice $(a, b) \in N \times N$ există $(p, q, r; x, y)$ astfel ca

1) $p, q, r \in S$; $x, y \geqslant 0$,
2) $F_{pq}(x) = a$, $F_{qr}(y) = b$ şi $F_{pr}(x + y) = T(a, b)$,

unde

$$N = \{t,\ F_{pq}(x) = t \text{ pentru anumiţi } p, q \in S \text{ şi } x \geqslant 0\}$$

care se mai numeşte şi rangul numeric al funcţiei F. Dacă $N = (0,1)$ atunci se spune că T este cea mai bună t-normă.

Este clar astfel că un alt punct de vedere în studiul t-normelor este acela legat de însăşi natura spaţiului metric probabilist ataşat.

Am văzut că în mulţimea t-normelor se poate introduce o relaţie de ordine şi astfel apare în mod natural următoarea problemă: dacă T este o t-normă există atunci un spaţiu metric probabilist cu proprietatea că T este cea mai tare astfel încît (S, F) să fie un spaţiu metric probabilist de tip Menger pentru t-norma T? Teorema următoare dă un răspuns afirmativ la această problemă.

TEOREMA 2.32. Dacă T este o t-normă atunci există un spaţiu metric probabilist (S, F) de tip Menger pentru care T este cea mai tare.

Demonstraţie. Fie a, b în $[0,1]$ arbitrari aleşi şi $S = (1, 2, 3)$. Să definim spaţiul metric probabilist (S, F) astfel: F este dată dacă F_{12}, F_{13}, F_{23} sînt date. Să punem

$$F_{12}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 - \varepsilon \\ a, & 1 - \varepsilon < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

$$F_{13}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 - 2\varepsilon, \\ T(a, b), & 2 - 2\varepsilon < x \leqslant 2 - \varepsilon, \\ 1, & 2 - \varepsilon < x. \end{cases}$$

$$F_{23}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 - \varepsilon, \\ b, & 1 - \varepsilon < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Trebuie să verificăm că avem într-adevăr un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T.

Să arătăm că

$$F_{13}(x+y) \geqslant T(F_{12}(x), F_{23}(y))$$

și pentru aceasta este suficient să arătăm că este adevărată atunci cînd $x \in (1-\varepsilon, 1]$ și $y \in (1-\varepsilon, 1]$. Cum în acest caz membrul drept este cel puțin $T(a, b)$ iar membrul stîng cel mult $T(a, b)$, relația este satisfăcută.

Similar se arată că au loc relațiile

$$F_{23}(x+y) \geqslant T(F_{21}(x), F_{13}(y)),$$

$$F_{12}(x+y) \geqslant T(F_{13}(x), F_{32}(y)).$$

Să considerăm acum mulțimea tuturor spațiilor metrice probabiliste construite în modul indicat corespunzător tuturor perechilor $(a, b) \in [0, 1] \times [0,1]$. Dacă p și q sînt două puncte în spații diferite vom spune

$$F_{pq}(x) = H(x-1)$$

și trebuie să verificăm că în acest mod am obținut un spațiu metric statistic de tip Menger cu t-norma T.

Vom avea mai multe cazuri de considerat. Dacă p, q, r aparțin la trei spații distincte construite mai înainte atunci

$$F_{pr}(x+y) = H(x+y-1)$$

care este mai mare decît

$$T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) = T(H(x-1), H(y-1))$$

și în acest caz inegalitatea (IV_m) este adevărată.

În cazul cînd există două puncte într-un spațiu iar celălalt în alt spațiu. Să notăm acest punct cu p iar celelalte cu r și s. În acest caz avem

$$F_{pr}(x+y) = H(x+y-1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ inegalitatea IV_m se verifică imediat.

Dacă avem $F_{qr}(x+y)$ de comparat cu $T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) = T(H(x-1), H(y-1))$ este suficient să considerăm cazul cînd $x, y \geqslant 1$ de unde $x+y \geqslant 2$ implicînd că și membrul stîng este 1; inegalitatea este astfel verificată. Este clar că pentru acest spațiu T este t-norma cea mai tare posibilă deoarece nu există altă t-normă mai mare ca aceasta în orice punct (a, b) din $[0, 1] \times [0,1]$. Teorema este astfel demonstrată.

Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T; este posibil ca (S, F) să fie un spațiu metric probabilist de tip Menger și în raport cu alte t-norme. Problema care se pune este deci de a vedea dacă există o t-normă cea mai tare pentru care (S, F) să fie un spațiu metric probabilist de tip Menger.

Rezultatele pe care le expunem acum răspund la această chestiune. Este ușor de văzut că are loc:

TEOREMA 2.33. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-normele $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ pe care le presupunem că nu satisfac și proprietatea de asociativitate. În acest caz $\sup\limits_{\alpha \in A} T_\alpha$ este o t-normă fără proprietatea de asociativitate.

Următorul exemplu arată că $\max\{T_1, T_2\}$ unde T_1, T_2 sînt două t-norme, nu mai este o t-normă. În fapt vom arăta că este posibil ca T_1, T_2 să fie asociative și $\max\{T_1, T_2\}$ să nu fie. În adevăr, fie

$$T_1(x, y) = \max(x + y - 1, 0),$$

$$T_2(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} \leqslant x, y < 1, \\ a, & x = a, y = 1, \\ & y = a, x = 1, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

care sînt t-norme. Dar $T = \max\{T_1, T_2\}$ nu este asociativă deoarece

$$T\left(T\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = T\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$T\left(\frac{3}{4}, T\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)\right) = T\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Are loc:

TEOREMA 2.34. Există un spațiu metric probabilist de tip Menger care nu are o t-normă cea mai tare.

Demonstrație. Spațiul construit la teorema 2.30 este un spațiu de tip Menger cu $T = \max\{T_1, T_2\}$ deoarece în construcție nu s-a folosit asociativitatea lui T. Dar atunci (S, F) este un spațiu de tip Menger pentru t-normele T_1 și T_2; dacă (S, F) ar avea o t-normă cea mai tare pentru care ar fi de tip Menger atunci ar fi și pentru $T = \max\{T_1, T_2\}$ care nu este o t-normă. Rezultă astfel că nu orice familie de t-norme are un element maximal; în cele ce urmează dăm o condiție suficientă pentru existența unui element maximal.

TEOREMA 2.35. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma $T_\alpha, \varepsilon \in A$. Să presupunem că T_α, pentru fiecare $\alpha \in A$ este continuă la stînga. În acest caz există o t-normă continuă la stînga mai tare decît orice T_α, $\alpha \in A$.

Demonstrație. Pentru a demonstra teorema este suficient să verificăm că putem aplica lema lui Zorn mulțimii $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$, adică dacă $\{T_\beta\}$ este o subfamilie total ordonată atunci există o t-normă continuă la stînga care majorează orice T_β. Este evident că toate proprietățile t-normelor sînt adevărate exceptînd asociativitatea și continuitatea la stînga. Fie $T = \sup T_\beta$. Să arătăm că T este continuă la stînga. În adevăr, fie $x, y \in [0,1]$ și $\varepsilon > 0$ arbitrar. Există β_0 astfel ca

$$0 \leqslant T(x, y) - T_{\beta_0}(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

și cum T_{β_0} este continuă la stînga și monotonă, există $\delta > 0$ astfel ca $0 < x - x' < \delta$,

$$0 < T_{\beta_0}(x, y) - T_{\beta_0}(x', y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cum însă

$$T_{\beta_0}(x', y) - T(x', y) < 0$$

rezultă că

$$T(x, y) - T(x', y) < \varepsilon,$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă $0 < |x - x'| < \delta$. Cum $T(x, y) = T(y, x)$ rezultă că am demonstrat continuitatea la stînga a funcției T.

Să arătăm acum că T este și asociativă. A arăta că T este asociativă înseamnă a arăta că pentru orice permutare a numerelor (a_1, b_1, c_1), $T(T(a_1, b_1), c_1)$ este invariantă. Fie pentru aceasta o permutare arbitrară (a_2, b_2, c_2) a acestor numere și $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $\{T_\beta\}$ este total ordonată există β_1 astfel ca

$$0 \leqslant T(T(a_i, b_i), c_i) - T_{\beta_1}(T(a_i, b_i), c_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Cum T_{β_1} este continuă la stînga și $T = \sup_\beta T_\beta$ rezultă că există $\alpha_1 > \beta_1$ ca

$$|T(a_1, b_1) - T_{\alpha_1}(a_1, b_1)| < \delta$$

$$|T(a_2, b_2) - T_{\alpha_1}(a_2, b_2))| < \delta$$

să implice faptul că

$$T_{\beta_1}(T_{\alpha_1}(a_i, b_i), c_i) - T_{\beta_1}(T_{\alpha_1}(a_i, b_i), c_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2$$

de unde rezultă că

$$0 \leqslant T(T(a_1, b_1), c_1) - T_{\alpha_1}(T_{\alpha_1}(a_1, b_1), c_1) < \varepsilon$$

și

$$0 \leqslant T(a_2, b_2), c_2) - T_{\alpha_1}(T_{\alpha_1}(a, b_2), c_2) < \varepsilon$$

deoarece

$$0 \leqslant T_{\beta_1}(T_{\alpha_1}(a_i, b_i), c_i) - T_{\alpha_1}(T_{\alpha_1}(a_i, b_i), c_i) \leqslant 0.$$

Cum T_{α_1} este asociativă avem

$$T_{\alpha_1}(T_{\alpha_1}(a_1, b_1,) c_1) = T_{\alpha_1}(T_{\alpha_1}(a_2, b_2), c_2)$$

de unde

$$T(T(a_1, b_1), c_1) - T(T(a_2, b_2), c_2) < \varepsilon$$

și asoctivitatea funcției $T = \sup T_\beta$ este demonstrată.

Menționăm că un rezultat privind t-normele a fost obținut de către Șerstnev și că rezultatele expuse mai sus privind t-normele și spațiile metrice probabiliste au fost obținute de către Thorp.

Scanned with OKEN Scanner

3 Topologia spațiilor metrice probabiliste

Scopul nostru în acest capitol este de a introduce topologii pe spațiile metrice probabiliste. În primul rînd vom arăta că pentru un spațiu cvasi-metric probabilist structura topologică adecvată este cea de spațiu bitopologic. Vom considera apoi topologii pe spații metrice probabiliste și în sfîrșit vom prezenta spațiile topologice probabiliste.

3.1. Spațiul bitopologic atașat unui spațiu cvasi-metric probabilist
Topologii pe un spațiu metric probabilist

Fie S o mulțime oarecare și $\mathscr{D}$ o familie de părți ale lui S. Se spune că $\mathscr{D}$ este o topologie pe S dacă următoarele axiome sînt îndeplinite :

1) S și $\emptyset$ sînt în $\mathscr{D}$,
2) dacă $U,\ V \in \mathscr{D}$ atunci $U \cap V \in \mathscr{D}$,
3) reuniunea oricărei familii de elemente din $\mathscr{D}$ este în $\mathscr{D}$.

Se spune că o mulțime este deschisă dacă este un element din $\mathscr{D}$ și perechea $(S, \mathscr{D})$ se spune că este un spațiu topologic. În general nu se mai scrie $(S, \mathscr{D})$ ci numai S spațiu topologic.

Se spune că $\mathscr{B}$ este o bază pentru topologia $\mathscr{D}$ dacă orice mulțime deschisă este reuniunea unei submulțimi de elemente din $\mathscr{B}$. De asemenea o vecinătate a punctului s este orice mulțime din s care conține o mulțime deschisă care conține pe s.

Fie S o mulțime și să presupunem că vrem să definim o topologie pe S. O metodă constă în a defini o topologie pe S cu ajutorul vecinătăților punctelor $s \in S$. Să presupunem deci că avem mulțimea m de

Scanned with OKEN Scanner

perechi ordonate (s, U) unde $s \in S$ și U este o submulțime a lui S și că următoarele proprietăți sînt adevărate :

1) $(s, S) \in m \quad \forall s \in S$,
2) dacă $(s, U') \in m$ și $(s, U'') \in m \Rightarrow (s, U' \cap U'') \in m$,
3) dacă $(s, U) \in m$ și $S \supset U' \supset U \Rightarrow (s, U') \in m$,
4) dacă $(s, U) \in m$ există $U' \in S$ astfel ca
$(s, U') \in m$ și $(s', U) \in m \ \forall s' \in U'$.

Topologia definită de m este formată din toate submulțimile lui S, $\{U\}$ cu proprietatea că pentru fiecare element $s \in U$ perechea $(s, U) \in m$ și vecinătățile punctului $s \in S$ sînt acele submulțimi $U \subset S$ astfel ca $(s, U) \in m$. Acest mod de definire al unei topologii pe o mulțime este cunoscut sub numele de definire a unei topologii cu ajutorul vecinătăților.

Fie S un spațiu topologic și $s \in S$ iar $\mathcal{V}_s$ vecinătățile punctului $s \in S$. Se spune că $\mathcal{B}_s$ este o bază de vecinătăți în punctul $s \in S$ dacă o submulțime din S aparține familiei $\mathcal{V}_s$ dacă și numai dacă conține o submulțime din $\mathcal{B}_s$.

Fie acum S o mulțime și $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ două topologii pe S. Se spune că $(S, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ este în acest caz un spațiu bitopologic. Un spațiu bitopologic se spune că este Hausdorff dacă oricare ar fi s_1 și s_2 diferiți în S există $U_1 \in \mathcal{D}_1$ și $U_2 \in \mathcal{D}_2$ astfel ca $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ și $s_1 \in U_1$, $s_2 \in U_2$. Fie (S, F) un spațiu cvasi-metric probabilist și pentru orice $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ să definim vecinătățile punctului $s_0 \in S$ astfel :

DEFINIȚIA 3.1. Prin ${}_1(\varepsilon, \lambda)$-vecinătate a punctului $s_0 \in S$ vom înțelege mulțimea

$$N_{1,s_0}(\varepsilon, \lambda) = \{s, F_{ss_0}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

și prin $(\varepsilon, \lambda)_1$-vecinătate a punctului $s_0 \in S$ mulțimea

$$N_{s_0,1}(\varepsilon, \lambda) = \{s, F_{s_0 s}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}.$$

Următoarea teoremă arată cît de naturală este definiția 3.1.

TEOREMA 3.2. Dacă (S, F) este un spațiu cvasi-metric probabilist simplu atunci ${}_1(\varepsilon, \lambda)$-vecinătatea punctului s_0 este q-sfera centrată în s_0 și de o anumită rază, iar $(\varepsilon, \lambda)_1$-vecinătatea lui s_0 este p-sfera centrată în s_0 și de o anumită rază.

Demonstrație. Fie $s, s_0 \in S$ și deci

$$F_{ss_0}(\varepsilon) = G\left(\frac{\varepsilon}{(s, s_0)}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

este mai mare decît $1 - \lambda$ dacă şi numai dacă

$$(s, s_0) < k_{\lambda,z}$$

care este o sferă cu centrul în s_0. Teorema este demonstrată.

Pentru orice $s \in S$, $N_{s_0,1}(\varepsilon, \lambda)$ formează o bază pentru o topologie pe S pe care o notăm cu $\mathscr{D}_1$ şi analog topologia cu baza de vecinătăţi $N_{1,s_0}(\varepsilon, \lambda)$ o notăm cu $\mathscr{D}_2$. Are loc:

TEOREMA 3. 3. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T continuă atunci $(S, \mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$ este un spaţiu bitopologic Hausdorff.

Demonstraţie. Pentru a demonstra teorema trebuie să verificăm următoarele afirmaţii:

(α) pentru orice $s_0 \in S$ există cel puţin o vecinătate $N_{s_0,1}$ în una N_{1,s_0} care conţine punctul s_0; vecinătăţile punctului s_0 îl conţin;

(β) dacă $N^1_{s_0,1}$ şi $N^2_{s_0,1}$ sînt două vecinătăţi ale lui s_0 atunci există o vecinătate $N^3_{s_0,1}$ a punctului s_0 astfel încît $N^3_{s_0,1} \subset N^1_{s_0,1} \cap N^2_{s_0,1}$ (similar pentru vecinătăţi de forma N_{1,s_0});

(γ) dacă $N_{s_0,1}$ este o vecinătate a punctului s_0 atunci există pentru orice $\tilde{s} \in N_{s_0,1}$ o vecinătate $N_{\tilde{s},1}$ astfel ca $N_{\tilde{s},1} \subset N_{s_0,1}$, (similar pentru vecinătăţi de forma N_{1,s_0});

(δ) dacă $s_0 \neq \tilde{s}$ atunci există vecinătăţile N_{1,s_0} şi $N_{s,1}$ astfel ca

$$N_{1,s_0}\, N_{\tilde{s},1} = \emptyset.$$

Demonstraţie. 1) Cum pentru orice $\varepsilon > 0$, $F_{s_0 s_0}(\varepsilon) = 1 > 1 - \lambda$ deducem că $s_0 \in N_{1,s_0}$. Similar pentru $N_{s_0,1}$.

2) Fie $N_{1,s_0}(\varepsilon_1, \lambda_1)$ şi $N_{1,s_0}(\varepsilon_2, \lambda_2)$ două vecinătăţi ale punctului s_0. Să luăm

$$N^3_{1,s_0}(\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \min(\lambda_1, \lambda_2))$$

şi este uşor de văzut că

$$N^3_{1,s_0} \subset N_{1,s_0}(\varepsilon_1, \lambda_1),\ N_{1,s_0}(\varepsilon_2, \lambda_2) \supset N^3_{1,s_0}$$

şi afirmaţia este demonstrată. Similar pentru vecinătăţi de forma $N_{s_0,1}$.

Scanned with OKEN Scanner

3) fie $N_{1,s_0}(\varepsilon_1, \lambda_1) = \{s, F_{ss_0}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1\}$ şi fie $\tilde{s} \in N_{1,s_0}(\varepsilon_1, \lambda_1)$ de unde rezultă că

$$F_{\tilde{s}s_0}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1.$$

Cum însă $F_{\tilde{s}s_0}$ este continuă la stînga deducem că există $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ şi $\lambda_0 < \lambda_1$ astfel ca

$$F_{\tilde{s}s_0}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0 > 1 - \lambda_1.$$

Să punem

$$N_{1,\tilde{s}}(\varepsilon_2, \lambda_2) = \{r, F_{r\tilde{s}}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2\}$$

cu $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 - \varepsilon_0$ şi λ_2 cu proprietatea

$$T(1 - \lambda_0, 1 - \lambda_2) > 1 - \lambda_1,$$

care există deoarece T fiind continuă şi $T(a, 1) = a$. Să arătăm că $N_{1,\tilde{s}} \subset N_{1,s_0}$. Fie deci $s \in N_{1,\tilde{s}}$

$$F_{s\tilde{s}}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2$$

şi în acest caz avem

$$F_{ss_0}(\varepsilon_1) \geqslant T(F_{s\tilde{s}}(\varepsilon_0), F_{\tilde{s}s_0}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)) \geqslant T(1 - \lambda_0, 1 - \lambda_2) > 1 - \lambda_1.$$

Afirmaţia este demonstrată. Similar pentru vecinătate de forma $N_{s_0,1}$

(δ). Să presupunem că $r_0 \neq s_0$ şi să luăm vecinătăţile

$$N_{1,r_0}, \quad N_{s_0,1}$$

definite astfel: cum $r_0 \neq s_0$ există $x > 0$ şi $y > 0$ astfel ca

1) $0 \leqslant \alpha_1 < 1$, $F_{r_0s_0}(x) = \alpha_1$,

2) $0 \leqslant \beta_1 < 1$, $F_{s_0r_0}(y) = \beta_1$.

Să luăm

$$N_{1,r_0}\left(\frac{x}{2}, 1 - \alpha_2\right) = \left\{r, F_{rr_0}\left(\frac{x}{2}\right) > \alpha_2\right\},$$

$$N_{s_0,1}\left(\frac{x}{2}, 1 - \beta_2\right) = \left\{s, F_{s_0s}\left(\frac{x}{2}\right) > \beta_2\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\alpha_2 < \alpha_1 \text{ și } \beta_2 < \beta_1 \text{ și } T(\alpha_2, \beta_2) > \beta_1.$$

Să presupunem că aceste vecinătăți au intersecție nevidă și deci fie s un punct comun. Avem,

$$\beta_1 = F_{s_0 r_0}\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant T\left(F_{s_0 s}\left(\frac{x}{2}\right), F_{s r_0}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geqslant T(\beta_2, \alpha_2)$$

care este o contradiție și teorema este demonstrată.

Înainte de a defini o convergență în spații probabiliste vom face cîteva observații privind spațiile cvasi-metrice.

Fie (S, p) un spațiu cvasi-metric. O problemă importantă în teoria spațiilor cvasi-metrice este aceea de a da o definiție satisfăcătoare a noțiunii de șir Cuachy. O definiție este următoarea:

DEFINIȚIA 3.4. Un șir $\{x_n\}$ de elemente din S se spune că este un șir p-Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un întreg m astfel ca

$$p(x_r, x_s) < \varepsilon, \; r > s > m.$$

Se spune că șirul $\{y_n\}$ p-converge către y_0 dacă $\lim p(y_n, y_0) = 0$ și se spune că o parte $S_1 \subset S$ este p-completă dacă orice șir p-Cauchy de elemente din S_1 are p-limită în S_1. Se poate da un exemplu de șir care p-converge și nu este p-Cauchy. Aceste dificultăți se întîlnesc și în cazul spațiilor cvasi-metrice probabiliste. O altă dificultate care se întîlnește este în legătură cu următoarea problemă: dacă (S, ρ) este un spațiu metric care nu este complet, este cunoscut că întotdeauna există un spațiu metric complet $(\widetilde{S}, \widetilde{\rho})$ astfel ca (S, ρ) să fie izometric cu o parte densă a lui $(\widetilde{S}, \widetilde{\rho})$. Spațiul $(\widetilde{S}, \widetilde{\rho})$ se mai spune că este completatul spațiului (S, ρ). Recent a fost demonstrat că un fapt analog are loc în cazul cînd spațiul este cvasi-metric și problema care se pune este de a extinde rezultatul la spații cvasi-metrice probabiliste.

DEFINIȚIA 3.5. Se spune că șirul $\{s_n\}$ dintr-un spațiu cvasi-metric probabilist este un șir 1-Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\lambda > 0$ există un întreg $N_{\varepsilon, \lambda}$ astfel ca

$$F_{s_r s_t}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

dacă $r > N_{\varepsilon,\lambda}$.

Scanned with OKEN Scanner

Şirul $\{s_n\}$ l-converge către s_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ există $N_{\varepsilon,\lambda}$ astfel ca dacă $r > N_{\varepsilon,\lambda}$ să avem

$$F_{s_r s_0}(\varepsilon) > 1 - \lambda.$$

Analog definim convergenţa-1.
Are loc următoarea:

TEOREMA 3.6. Dacă şirul $\{s_n\}$ 1-converge către s_0 atunci

$$F_{s_r s_0}(x) \to H(x) \tag{3.6.1}$$

oricare ar fi $x > 0$. Reciproc, dacă (3.6.1) atunci s_n 1-converge către s_0.

Demonstraţie. Fie deci $x > 0$ şi $\lambda > 0$. În acest caz există întregul N_x, astfel ca

$$F_{s_r s_0}(x) > 1 - \lambda$$

dacă $r > N_x$, care înseamnă că $F_{s_r s_0} \to H$ pentru orice $x > 0$. Dacă $x = 0$ afirmaţia este evidentă ca şi afirmaţia reciprocă. Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă următorul fapt: convergenţa în teoremă are loc uniform pe orice mulţime compactă din R_+.

TEOREMA 3.7. Dacă (S, F) este un spaţiu cvasi-metric probabilist de tip Menger şi T este o t-normă continuă atunci F este 1-inferior tip Menger şi T este o t-normă continuă atunci F este 1-inferior semicontinuă adică dacă $\{r_n\}$ este 1-convergent către r şi $\{s_n\}$ este convergent-1 către s, atunci

$$\liminf_{n \to \infty} F_{r_n s_n}(x) = F_{rs}(x).$$

Demonstraţie. Dacă $x = 0$ afirmaţia teoremei este evidentă. Fie deci $x > 0$ şi $\varepsilon > 0$. Cum F_{rs} este continuă la stînga rezultă că există $h > 0$ astfel ca $0 < 2h < x$ şi

$$F_{rs}(x) - F_{rs}(x - 2h) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Să punem $a = F_{rs}(x-2h) = a$ și cum T este o t-normă continuă și $T(a, 1) = a$, există $t \in (0,1)$ astfel ca

$$T(a, t) > a - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$T\left(a - \frac{\varepsilon}{3}, t\right) > a - \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Cum $\{s_n'\}$ este 1-convergent către s, din teorema de mai înainte rezultă că există $N_{h,t}$ astfel ca

$$F_{ss_n}(h) > t,$$

$$F_{r_n r}(h) > t,$$

dacă $N_{h,t} < n$. Dar

$$F_{r_n s_n}(x) \geqslant T(F_{r_n s}(x-h), F_{ss_n}(h)),$$

$$F_{r_n s}(x-h) \geqslant T(F_{r_n r}(h), F_{rs}(x-2h)),$$

$$F_{r_n s}(x-h) \geqslant T(a, t) \geqslant a - \frac{\varepsilon}{3},$$

de unde

$$F_{r_n s_n}(x) \geqslant T\left(a - \frac{\varepsilon}{3}, t\right) \geqslant a - 2\frac{\varepsilon}{3} > F_{rs}(x) - \varepsilon$$

și astfel afirmația este demonstrată.

3.2. Spațiul bitopologic generalizat atașat unui spațiu cvasi-metric probabilist sau unui spațiu metric probabilist

Este cunoscut că un spațiu metric (X, ρ) are o singură topologie naturală, care se construiește cu ajutorul distanței ρ; unui spațiu metric probabilist sau cvasi-metric probabilist i se pot asocia mai

Scanned with OKEN Scanner

multe structuri care să satisfacă axiomele din definiția unei topologii și acestea pot fi definite în mod natural. R. Arens a sugerat ca instrument util în studiul spațiilor metrice probabiliste, topologiile generalizate definite și studiate de A. Appert și Ky Fan. Rezultate utilizînd această sugestie au fost obținute de către E. Thorp și R. Fritsche.

DEFINIȚIA 3.8. O funcție φ este funcție profil dacă

1) $\varphi : [0, \infty) \to [0,1]$,

2) este nedescrescătoare pe $[0, \infty)$.

DEFINIȚIA 3.9. Fie (S, F) un spațiu cvasi-metric probabilist și φ o funcție profil, $s_0 \in S$, $A \subset S$ iar ε, $\lambda > 0$ dați.

(1) mulțimea $N_{1,s_0,\varphi}(\varepsilon, \lambda) = \{s, F_{ss_0}(\varepsilon) > \varphi(\varepsilon) - \lambda\}$ este numită $(\varepsilon, \lambda)_{1,\varphi}$ vecinătate a punctului s_0.

(2) s_0 este 1, φ-punct de acumulare pentru A dacă

$$N_{1,s_0,\varphi}(\varepsilon, \lambda) \cap \{s_0\} \cap A \neq \emptyset.$$

(3) A este 1, φ-închisă dacă $1,\varphi(A) \subseteq A$ unde $1, \varphi(A)$ înseamnă mulțimea 1-φ-punctelor de acumulare pentru mulțimea A.

Are loc

TEOREMA 3.10. Dacă (S, F) este un spațiu cvasi-metric probabilist și φ o funcție profil iar $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, o familie de mulțimi 1-φ închise, atunci

$$A = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$$

este 1, φ-închisă.

Demonstrație. Dacă $A \subseteq B$ atunci este evident că avem $1, \varphi(A) \subseteq 1, \varphi(B)$. Dacă $p \in 1, \varphi(A)$ atunci pentru orice $\varepsilon, \lambda > 0$ există q în A astfel ca

$$F_{pq}(\varepsilon) > \varphi(\varepsilon) - \lambda.$$

Cum $q \in A \Rightarrow q \in B$ rezultă că $p \in 1, \varphi(B)$. Dar $A \subseteq A_\alpha$ și deci $1, \varphi(A) \subseteq 1, \varphi(A_\alpha)$ care ne dă că $1 \cdot \varphi(A) \subseteq \bigcap_\alpha 1, \varphi(A_\alpha) = \bigcap_\alpha A_\alpha = A$. Teorema este demonstrată.

Vom remarca faptul că $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Proprietatea 1, φ-închiderii dată în teorema de mai sus a fost folosită pentru definirea unei clase

Scanned with OKEN Scanner

de structuri numite spații topologice generalizate cu ajutorul noțiunii de topologie generalizată. Deosebirea esențială între topologia generalizată și noțiunea de topologie constă în aceea că nu se mai cere ca, în mod necesar, reuniunea finită de mulțimi închise să fie tot o mulțime închisă.

Formulăm acum definiția topologiei generalizate numită și g-topologie.

DEFINIȚIA 3.11. Prin topologie generalizată pe un spațiu S se înțelege colecția de mulțimi $\{N_p, p \in S\}$ unde $\mathcal{N}_p = \{N_p\}$ numite și vecinătățile punctului p care are proprietatea că fiecare $N_p \ni p$.

DEFINIȚIA 3.12. Mulțimea S și colecția de vecinătăți $\{N_p, p \in S\}$ o vom numi spațiu topologic generalizat. Dacă avem două familii de vecinătăți, atunci S împreună cu cele două familii se va numi spațiu bitopologic generalizat.

Prin închidere a mulțimii E din S vom înțelege mulțimea $\mathrm{cl}\, E$ cu proprietatea că orice vecinătate a punctului $p \in \mathrm{cl}\, E$ intersectează pe E, iar prin interior vom înțelege $C_{\mathrm{cl}C_E}$.

În acest cadru natural se pune problema cum se extinde noțiunea de structură uniformă.

DEFINIȚIA 3.13. Prin structură uniformă generalizată se înțelege o familie de submulțimi din $S \times S$ cu proprietatea că fiecare membru al familiei conține diagonala $\Delta = \{(x, x), x \in S\}$.

În mod similar se pot defini și alte noțiuni corespunzînd noțiunilor de la structuri uniforme dar cum nu vom avea nevoie de acestea în cele ce urmează, nu le prezentăm.

Să considerăm cazul spațiilor cvasi-metrice probabiliste. Este evident că pentru orice $s_0 \in S$, $N_{1,s_0}(\varepsilon, \lambda) = \{s, F_{ss_0}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ implică faptul că $F_{s_0s_0}(\varepsilon) = 1 \geqslant \varphi(\varepsilon) - 1$ oricare ar fi ε și λ de unde $s_0 \in N_{1,s_0,\varphi}(\varepsilon, \lambda)$ și în acest fel pe un spațiu cvasi-metric probabilist (S, F) avem o topologie generalizată numită și $\varphi_s - g$ topologie pe S. Similar se poate defini o $\varphi_d - g$ topologie pe S și în acest mod pe S avem două topologii și tripletul $(S, \varphi_s - g, \varphi_d - g)$ se numește spațiul bitopologic generalizat atașat spațiului cvasi-metric probabilist (S, F) și funcției profil φ.

Dăm acum o listă de axiome pentru vecinătățile unui punct și vom arăta apoi legătura acestora cu topologiile φ_s-g și φ_d-g. Axiomele sînt următoarele:

N_1. Pentru orice vecinătate V_p a lui p avem $p \in V_p$.

N_2. Pentru orice p și orice pereche U_p și V_p de vecinătăți ale lui p există o vecinătate $W_p \ni p$ astfel ca $W_p \subseteq U_p \cap V_p$,

N_3. Pentru orice vecinătate V_p a lui p există vecinătatea U_p a lui p astfel ca pentru orice $q \in U_p$ să existe V_q cu proprietatea că $V_q \subset V_p$,

N_4. Pentru orice punct p și orice punct q într-o vecinătate V_p a lui p există o vecinătate V_q a lui q astfel ca $V_q \subset V_p$.

N_5. Dacă $p \neq q$ atunci există $V_p \ni p$ și $V_q \ni q$ astfel ca

1. $q \notin \bar{V}_p$,

2. $p \notin \bar{V}_q$.

N_6. Dacă $p \neq q$ atunci p și q au vecinătățile disjuncte V_p și V_q respectiv.

Are loc:

TEOREMA 3.14. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist și φ o funcție profil, atunci

$$N_p = \{N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda),\ \varepsilon,\ \lambda > 0,\ p \in S\}$$

cu $N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda) = \{q, F_{pq}(\varepsilon) > \varphi(\varepsilon) - \lambda\}$; familia N_p are următoarele proprietăți

1° N_1 este adevărată,

2° N_2 este adevărată dacă $F_{pq} - \varphi$ este nedescrescătoare, oricare ar fi $p, q \in S$,

3° N_5 este adevărată dacă pentru orice puncte distincte p, q în S există $x_0 > 0$ astfel ca $\varphi(x_0) > F_{pq}(x_0)$,

4° N_6 este adevărată dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger pentru t-norma T cu proprietatea că oricare ar fi $p, q \in S$

$$\sup_{x < \varphi(0^+)} T(x, x) < F_{pq}(0^+).$$

Demonstrație. 1° Cum $F_{pp}(\varepsilon) = 1 > 1 - \lambda \geqslant \varphi(\varepsilon) - \lambda$ și deci: $p \in N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda)$.

2° Fie $N_p(\varphi, \varepsilon_1, \lambda_1)$ și $N_p(\varphi, \varepsilon_2, \lambda_2)$ două φ-vecinătăți ale lui p și $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. În acest caz pentru $q \in N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda)$ avem $F_{pq}(\varepsilon) > \varphi(\varepsilon) - \lambda$ de unde rezultă că

$$F_{pq} - \varphi > -\lambda.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum pentru ε_i, $i = 1,2$ avem

$$(F_{pq} - \varphi)(\varepsilon_i) > -\lambda \geqslant -\lambda_i$$

de unde rezultă că $q \in N_p(\varphi, \varepsilon_i, \lambda_i)$, $i = 1,2$ şi deci

$$N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda) \subset N_p(\varphi, \varepsilon_1, \lambda_1) \cap N_p(\varphi, \varepsilon_2, \lambda_2)$$

şi 2° este demonstrată.

3° Cum avem $\varphi(x_0) > F_{pq}(x_0)$ deducem că există $\lambda_0 > 0$ astfel ca $\varphi(x_0) - \lambda_0 > F_{pq}(x_0)$ şi deci $N_p(\varphi, x_0, \lambda_0)$ nu conţine punctul q: deci şi $N_q(\varphi, x_0, \lambda_0)$ nu conţine punctul p (datorită simetriei).

4° Să punem $a = \lim_{x < \varphi(0+)} T(x, x)$ şi cum $T(0,0) = 0$, $T(\varphi(0^+), \varphi(0^+)) \geqslant a > F_{pq}(0^+)$ deducem că $\varphi(0^+) > 0$. Dacă $p \neq q$ şi $\varepsilon > 0$ să alegem $\lambda \in (0, \varphi(0^+))$ astfel încît

$$T(\varphi(0^+) - \lambda, \varphi(0^+) - \lambda)) > a - \lambda$$

şi fie $\delta > 0$ astfel ca $F_{pq}(\delta) < a$. Să luăm vecinătăţile

$$N_p\left(\varphi, \frac{\delta}{2}, \lambda\right), \quad N_q\left(\varphi, \frac{\delta}{2}, \lambda\right) \text{ şi } r \in N_p \cap N_q$$

de unde rezultă că

$$F_{pq}(\delta) \geqslant T\left(F_{pr}\left(\frac{\delta}{2}\right), F_{rq}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) \geqslant T\left(\varphi\left(\frac{\delta}{2}\right) - \lambda, \varphi\left(\frac{\delta}{2}\right) - \lambda\right) \geqslant$$

$$\geqslant T(\varphi(0^+) \lambda, \varphi(0^+) - \lambda) > a - \varepsilon$$

şi cum δ este independent de ε obţinem că

$$F_{pq}(\delta) \geqslant a$$

care este evident o contradicţie deoarece $N_p \cap N_q = \emptyset$. Teorema este astfel demonstrată.

Vom remarca faptul că, consideraţiile de mai sus pot fi făcute considerînd spaţiile cvasi-metrice probabiliste şi spaţiile cvasi-

metrice probabiliste de tip Menger (condiția 4°) și vecinătățile $N_{1,\varphi}(\varepsilon, \lambda)$, $N_{\varphi,1}(\varepsilon, \lambda)$.

Vom considera acum cîteva cazuri particulare de funcții φ.

Să considerăm cazul cînd

$$\varphi(x) = (1 - \lambda_0)\, H(x - \varepsilon_0)$$

unde $\varepsilon_0 > 0, 0 \leqslant \lambda_0 \leqslant 1$ și H este funcția definită prin

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Este clar că pentru $\varepsilon_0 = \lambda_0 = 0$ se obține topologia definită în definiția 1.1: Alegerea $\varepsilon_0 \neq 0$ și $\lambda_0 \in (0,1)$ ne dă ceea ce se numește $(\varepsilon_0, \lambda_0)$-topologie. Vom menționa că topologia $(0, \lambda_0)$ se mai numește pe scurt λ_0-topologie, iar topologia $(\varepsilon_0, 0)$ se numește ε_0-topologie.

Justificarea acestor denumiri este dată de:

TEOREMA 3.15. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist și φ o funcție profil de forma

$$\varphi(x) = (1 - \lambda_0)\, H(x - \varepsilon_0) \tag{3.15.1}$$

iar $p \in S$ atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\lambda > 0$ avem

$$N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda) = \begin{cases} S, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \text{ sau } \lambda > 1 - \lambda_0 \\ \{q, F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda_0 - \lambda, \varepsilon > \varepsilon_0 \text{ și } 0 < \lambda \leqslant 1 - \lambda_0\} \end{cases}$$

Demonstrație. Se verifică imediat prin calcul afirmația făcută.

Să punem $\delta = \lambda + \lambda_0$ în formula care dă pe $N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda)$, de unde obținem

$$N_p(\varphi, \varepsilon, \delta - \lambda_0) = \begin{cases} S, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \text{ sau } \delta > 0, \\ \{q, F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \delta, \varepsilon > \varepsilon_0, \lambda_0 < \delta \leqslant 1\}. \end{cases}$$

Ținînd seama de definiția punctelor de acumulare (în raport cu funcția profil φ, definiția 3.9) avem următoarele teoreme.

TEOREMA 3.16. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist, iar φ o funcție profil de forma (3.15.1) și $p \in S$ atunci $p \in \varphi(A)$ unde

Scanned with OKEN Scanner

$A \subseteq S$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > \varepsilon_0$ și $\delta > \lambda_0$ există $q \in A$ astfel ca

$$F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \delta.$$

TEOREMA 3.17. Dacă (S,F) este un spațiu metric probabilist, iar φ o funcție profil de forma (*) și $A_1, \ldots, A_n$ mulțimi închise, atunci $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ este închisă.

Demonstrație. Este evident suficient să presupunem că $n = 2$. Fie deci A_1 și A_2 mulțimi închise în raport cu funcția profil φ. Dacă $p \in \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$ atunci există $N_p(\varphi, \varepsilon_1, \delta_1 - \lambda_0) = N_1, N_p(\varphi, \varepsilon_2, \delta_2 - \lambda_0) = N_2$ astfel ca

$$(N_1 - \{p\}) \cap A_1 = \emptyset,$$

$$(N_2 - \{p\}) \cap A_2 = \emptyset,$$

de unde $(N_3 - \{p\}) \cap (A_1 \cup A_2)) = \emptyset$ cu $N_3 = N_p(\varphi, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \min(\delta_1, \delta_2) - \lambda_0))$ și deci $p \in \varphi(A_1 \cup A_2)$. În acest mod avem

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \subseteq \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2) \subseteq A_1 \cup A_2$$

și teorema este demonstrată.

Ca o consecință a teoremei 3.17 și a teoremei 3.10 putem enunța :

TEOREMA 3.18. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist și φ o funcție profil de forma (3.15.1) atunci φ-g-topologia lui S este o topologie în sensul uzual al cuvîntului.

Teorema următoare leagă axiomele N_i de clase speciale de spații Menger.

TEOREMA 3.19. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T avînd proprietatea

$$\sup_{x < 1-\lambda_0} T(x, x) = 1 - \lambda_0, \quad \lambda_0 \in [0,1)$$

atunci au loc următoarele afirmații :

1° λ_0-topologia pentru S satisface axioma N_3,

Scanned with OKEN Scanner

2° Dacă există pentru orice $p \neq q$ un număr $x > 2\varepsilon_0$, astfel ca

$$F_{pq}(x) < 1 - \lambda_0$$

atunci $(\varepsilon_0, \lambda_0)$-topologia pentru S satisface axioma N_6.

Demonstrație. 1° Fie $N_p(\varphi_{\lambda_0}, \varepsilon, \delta - \lambda_0)$ o vecinătate a lui p și $\delta' > \lambda_0$ astfel ca $T(1-\delta', 1-\delta') > 1-\delta$ care există deoarece $\sup_{x<1-\lambda_0} T(x, x) = 1-\lambda_0$. Să alegem $\alpha \in (0, \varepsilon)$ și $q \in N_p(\varphi_{t_0, \delta, \delta'-\lambda_0})$ și $r \in N_q(\varphi_{0, \varepsilon-\alpha, \delta'-\lambda_0})$. În acest caz, deoarece spațiul este de tip Menger

$$F_{pr}(\varepsilon) \geqslant T(F_{pq}(\alpha), F_{qr}(\varepsilon - \alpha)) \geqslant T(1-\delta', 1-\delta') > 1-\delta,$$

de unde rezultă că $r \in N_q(\varphi_{\lambda_0, \varepsilon, \delta-\lambda_0})$ și afirmația este demonstrată.

2° Fie $p \neq q$ și $x > 2\varepsilon_0$ cu $F_{pq}(x) = \alpha < 1 - \lambda_0$ și $\delta \in (\lambda_0, 1)$ astfel ca

$$T(1-\delta, 1-\delta) = \alpha.$$

În acest caz avem că vecinătățile

$$N_p\left(\varphi_{\varepsilon_0}, \lambda_0; \frac{x}{2}; \delta - \lambda_0\right) \text{ și } N_q\left(\varphi_{\lambda_0}, \lambda_0; \frac{x}{2}; \delta - \lambda_0\right)$$

sînt disjuncte și afirmația este demonstrată.

Teorema 3.20. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T avînd proprietatea

$$\lim_{x < 1-\lambda_0} T(a, x) = a, \quad a \in [0, 1-\lambda_0].$$

În acest caz λ_0-topologia pe S satisface axioma N_1.

Demonstrație. Fie $p \in S$, $\varepsilon, \delta > 0$ iar $\delta > \lambda_0$ și $q \in N_p(\varphi_{\lambda_0}, \varepsilon, \delta - \lambda_0)$ astfel încît $F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \delta$. Cum F_{pq} este continuă la stînga există $\varepsilon' < \varepsilon$ și δ', $\lambda_0 < \delta' < \delta$ astfel ca

$$F_{pq}(\varepsilon') > 1 - \delta' > 1 - \delta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon - \varepsilon')$ și fie $\delta'' \in (\lambda_0, \delta')$ astfel că

$$T(1 - \delta', 1 - \delta'') > 1 - \delta.$$

Dacă $r \in N_q(\varphi_{\lambda_0}, \varepsilon'', \delta'' - \lambda_0)$ atunci

$$F_{pr}(\varepsilon) \geqslant T(F_{pq}(\varepsilon'), F_{qr}(\varepsilon - \varepsilon') \geqslant T(1 - \delta', F_{qr}(\varepsilon'')) \geqslant$$

$$\geqslant T(1 - \delta', 1 - \delta) > 1 - \delta$$

și deci $r \in N_q(\varphi_{\lambda_0}, \varepsilon, \delta - \lambda)$, iar $N_q(\varphi_{\lambda_0}, \varepsilon'', \delta'' - \lambda_0)$ este în $N_p(\varphi_{\lambda_0}, \varepsilon, \delta - \lambda_0)$ ceea ce demonstrează teorema.

O altă metodă de a introduce topologii pe un spațiu metric (cvasi-metric) probabilist (S, F) este de a folosi submulțimi din $R_+ \times R_+$.

Fie deci X o submulțime din $R_+ \times R_+$ și să punem

$$\gamma_1(X) = \{N_p(u, v), (u, v) \in X, p \in S\}$$

unde $N_p(u, v) = \{q, q \in S, F_{pq}(u) > 1 - v\}$.

DEFINIȚIA 3.21. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist și g-topologia corespunzătoare unei submulțimi $X \subset R_+ \times R_+$. Această topologie se mai numește X, g-topologie și se notează cu $\tau(X)$.

Vom remarca faptul că g-topologiile se obțin în cazul cînd $X = R_+ \times R_+$.

Vom remarca faptul că se poate introduce o relație de ordine între mulțimile $\tau(X)$, X, g-topologii.

Are loc următoarea:

TEOREMA 3.22. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist, $X \subset R_+ \times R_+$ și dacă

$$X^* = X \cup \{(u^*, v^*), u^* \geqslant u, v^* \geqslant v \text{ pentru o pereche } (u, v) \in X\} \cup$$

$$\cup \{(u, v), u > 0, v > 1\} \qquad (3.22.1)$$

atunci $\tau(X) = \tau(X^*)$.

Demonstrație. Relația de ordine parțială de care a fost vorba mai sus se definește astfel: $\tau(X) \leqslant \tau(Y)$ dacă orice vecinătate în $\tau(Y)$ a unui punct conține o vecinătate a punctului în $\tau(X)$.

Scanned with OKEN Scanner

Este ușor de văzut că dacă $X \supseteq Y$ atunci $\tau(X) \leqslant \tau(Y)$.
Pentru demonstrația teoremei vom remarca faptul că din

$$X \subseteq X^*$$

avem că $\tau(X) \geqslant \tau(X^*)$. Să arătăm că avem și relația în sens contrar. Fie deci $p \in S$ și $N_p(u, v)$ 0 X^*-vecinătate a lui p. Deci $(u, v) \in X^*$ ne dă că are loc una din relațiile:
1° (u, v) X; 2°: $u \geqslant u'$, $v \geqslant v'$ pentru o pereche (u', v') X; sau 3° $u > 0$, $v > 1$.
În cazul 1°, $N_p(u, v)$ este chiar o X-vecinătate. Dacă avem 2°, atunci fie $q \in N_p(u', v')$ o X-vecinătate a lui p și deci

$$F_{pq}(u) \geqslant F_{pq}(u') > 1 - v' > 1 - v$$

de unde $q \in N_p(u, v)$.
În cazul 3°, $N_p(u, v) = \{q, F_{pq}(u) > 1 - v\} = S$ deoarece $1 - v < 0$ și $u > 0$. Teorema este astfel demonstrată.

Definiția 3.23. O mulțime de forma (3.22.1) se mai numește și mulțime determinantă.
Vom da acum un rezultat care arată legătura între funcțiile profil și mulțimile determinante.
Fie X o mulțime determinantă și

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ \inf y, & (x, y) \in X,\ x > 0, \end{cases}$$

care este o funcție definită pe $[0, \infty)$ și cu valori în $[0,1]$ și este necrescătoare. Funcția $\alpha(\cdot)$ este numită și funcția frontieră a mulțimii X iar $\varphi(x) = 1 - \alpha(x)$ este o funcție profil, numită și funcția profil asociată mulțimii determinante X.

Teorema 3.24. Fie X o mulțime determinantă cu funcția frontieră α și funcția profil asociată φ. În acest caz:
1° φ-g-topologia lui S este $\leqslant X$-g-topologia lui S,
2° dacă $(x, \alpha(x)) \notin X$ pentru orice $x > 0$, cele două topologii de la 1° sînt echivalente.

Demonstrație. Dacă $p \in S$ și $N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda)$ este 0 $(\varphi, \varepsilon, \lambda)$ vecinătate a lui p, pentru $u = \varepsilon$ și v astfel ca

$$\alpha(q) < v < \alpha(\varepsilon) + \lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

avem că $(u, v) \in X$ și deci din $q \in N_p(u, v)$ rezultă că $q \in N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda)$ și 1° este demonstrată.

Pentru a demonstra 2° vom remarca că dacă $(u, \alpha(u)) \notin X$, există λ cu $0 < \lambda < v - \alpha(u)$ și pentru $\varepsilon = u$ avem că $(\varepsilon, \alpha(\varepsilon) + \lambda) \in X$ și deci $N_p(\varphi, \varepsilon, \lambda)$ este o φ-vecinătate a lui p care este și o submulțime din $N_p(u, v)$. Ținînd seama și de 1° afirmația este complet demonstrată.

Ca o consecință simplă a acestei teoreme avem:

TEOREMA 3.25. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist și φ o funcție profil și $X = \{(x, y), y > \varphi(x)\}$. În acest caz X-g-topologia lui S și φ-g-topologia lui S sînt echivalente.

Vom remarca și faptul că nu există o corespondență biunivocă între X-g-topologia lui S și φ-g-topologia lui S; este posibil ca mai multe X-g topologii să ne dea aceeași φ-g topologie în sensul în care este dată corespondența de teorema 1.25.

3.3. Spații bitopologige probabiliste și spații topologice probabiliste

Am văzut că dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist sau un spațiu cvasi-metric probabilist atunci putem defini o topologie (τ) sau două topologii (τ, σ) astfel ca (S, τ), (S, τ, σ) este un spațiu topologic, respectiv bitopologic.

Apare în mod natural problema de a face acest lucru direct și anume de a generaliza conceptele topologice astfel încît următoarele cerințe să fie îndeplinite:

1) axiomele să reflecte pe cele de la spațiul topologic sau bitopologic,

2) cum o topologie este dată de o colecție de mulțimi, structura pe care vrem s-o definim să fie caracterizată de o colecție de mulțimi (numite și mulțimi fuzzy),

3) cum metrica pe un spațiu metric sau cvasi-metric definește spațiul topologic sau bitopologic, metrica probabilistă sau cvasi-metrica să definească structura pe care o introducem.

Menționăm că pentru cazul spațiilor topologice prima încercare de a defini o astfel de structură a fost făcută de Wagner; studiul său a fost reluat, modificat și amplificat de către Frank.

Fie $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ care este monotonă în sensul că

$$a \leqslant a_1, \; b \leqslant b_1 \Rightarrow T(a, b) \leqslant T(a_1, b_1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și vom scrie $T \leqslant T'$ dacă și numai dacă oricare ar fi $(a, b) \in [0,1] \times [0,1]$

$$T(a, b) \leqslant T'(a, b).$$

Vom remarca faptul că orice t-normă este o funcție T. Vom defini acum o structură topologică pe o mulțime S. Prin $\mathscr{P}(S)$ vom înțelege familia tuturor părților lui S.

DEFINIȚIA 3.26. Prin θ-închidere pe mulțimea S vom înțelege o aplicație

$$\theta : \mathscr{P}(S) \times I \to \mathscr{P}(S)$$

notată pe scurt astfel: $\theta(A, \lambda) = A^\lambda$ și care are următoarele proprietăți

$$C_1.\ A^\circ = A,\ \forall\ A \in \mathscr{P}(S),$$

$$C_2.\ \emptyset^\lambda = \emptyset,\ \forall\ \lambda > 0,$$

$$C_3.\ A \subset A^\lambda,\ \forall\ A \text{ și } \lambda > 0,$$

$$C_4.\ A^\lambda \subseteq B^\lambda,\ \forall\ \lambda \text{ și } A \subseteq B,$$

$$C_5.\ A^\lambda \supseteq A,\ \forall\ \lambda \leqslant \mu.$$

DEFINIȚIA 3.27. Dacă θ_1 și θ_2 sînt două închideri pe S și T_1, T_2 două funcții T, vom spune că $(S, \theta_1, \theta_2, T_1, T_2)$ este un spațiu bitopologic probabilist, dacă oricare ar fi λ_1, λ_2 avem

$$C_6.\ (A^\mu)^\lambda \subseteq A^{T_i(\lambda, \mu)},\ i = 1,2,$$

oricare ar fi $A \neq \emptyset$.

DEFINIȚIA 3.28. O θ-închidere va fi numită continuă la stînga în λ dacă

$$(LC) \qquad A^\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} A^\mu,\ \forall\ A$$

și va fi numită continuă la stînga, dacă este continuă la stînga în orice $\lambda \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom remarca faptul că putem interpreta $C_1 - C_6$ în modul următor: x este în A^λ dacă și numai dacă probabilitatea ca x să fie în el A este mai mare sau egală cu λ.

Aici prin el A înțelegem noțiunea de închidere topologică în sensul lui Kuratowski.

Este ușor de văzut că are loc:

TEOREMA 3.29. Pentru orice A, B și λ fiecare din afirmațiile

$$C_{4'}.\ A^\lambda \cup B^\lambda \subseteq (A \cup B)^\lambda$$

$$C_{4''}.\ (A \cap B)^\lambda \subseteq A^\lambda \cap B^\lambda,$$

este echivalentă cu C_4.

Cum $(A^\lambda)^\mu \subseteq S = A^\circ$ rezultă că

$$(S,\ \theta_1,\ \theta_2,\ T_z,\ T_s),$$

unde $T_z(\lambda,\ \mu) = 0$ este un spațiu bitopologic.

Dacă $\theta = \theta_1 = \theta_2$ și $T_1 = T_2 = T$ atunci vom scrie $(S,\ \theta,\ T)$ și vom numi acest triplet spațiu topologic probabilist.

Fie θ o închidere pe S și să punem pentru orice $x \in S$ și $A \subset S$

$$c(x, A) = \sup\ \{\lambda,\ x \in A^\lambda\}.$$

Are loc:

TEOREMA 3.30. θ este o θ-închidere la stînga dacă și numai dacă

$$A^\lambda = \{x, c(x, A) \geqslant \lambda\}$$

oricare ar fi $A \supset S$ și λ.

Demonstrație. Pentru demonstrație este suficient să arătăm că

$$\bigcap_{\mu < \lambda} A^\mu = \{x,\ c(x, A) \geqslant \lambda\}.$$

Dacă $c(x, A) \geqslant \lambda$ atunci $x \in A^\mu$ oricare ar fi $\mu < \lambda$. Dacă $x \in A^\mu$, oricare ar fi $\mu < \lambda$, atunci $c(x, A) \geqslant \mu$ oricare ar fi $\mu < \lambda$ și deci $c(x, \lambda) \geqslant \lambda$. Teorema este astfel demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Cîteva proprietăţi ale funcţiei $c(x, A)$ sînt date în:

TEOREMA 3.31. Dacă θ este o θ-închidere pe S atunci au loc următoarele afirmaţii

1° $c(x, \emptyset) = 0, \forall\, x \in S,$

2° $c(x, A) \leqslant 1, \forall\, x \in S,\ A \subseteq S,$

3° $c(x, A) \leqslant c(x, B)$ dacă $A \subseteq B,$

4° dacă $(A^{\mu})^{\lambda} \subseteq A^{T(\lambda, \mu)}\ \forall\, A \neq \emptyset$ şi (λ, μ) atunci

$$c(c, A^{\mu}) > \lambda \Rightarrow c(x, A) \geqslant T(\lambda, \mu)\ \forall\, A \neq \emptyset \text{ şi } (\lambda, \mu),$$

5° dacă θ este continuă la stînga atunci

$$c(x, A^{\mu}) > \lambda \Rightarrow c(x, A) \geqslant T(\lambda, \mu).$$

Demonstraţie. Se verifică imediat folosind definiţia funcţiei $c(x, A)$ şi a θ-închiderii θ.

Următoarea teoremă dă o metodă de a construi 0-închideri.

TEOREMA 3.32. Dacă S este o mulţime şi pentru orice $x \in S$ şi $A \subset S$ funcţia

$$(x, A) \to c(x, A)$$

satisface condiţiile 1°, 2°, 3° din teorema 3.31, atunci

$$\tilde{\theta} : (A, \lambda) = \{x,\ c(x, A) \geqslant \lambda\}$$

este o θ-închidere pe S care este continuă la stînga.

Demonstraţie. Evidentă.

L. Zadeh a introdus noţiunea de mulţime fuzzy. În cele ce urmează dăm o caracterizare a funcţiei „c" cu ajutorul unor mulţimi fuzzy. Reamintim cîteva noţiuni din teoria mulţimilor fuzzy.

Fie S o mulţime şi $\mathscr{P}(S)$ familia tuturor părţilor sale. Prin mulţime fuzzy vom înţelege perechea (A, f_A) unde $A \in \mathscr{P}(S)$ şi $f_A : S \to [0,1]$, care oricărui element $x \in S$ îi ataşază numărul $f_A(x)$ caracterizînd gradul de apartenenţă al elementului x la mulţimea A.

Scanned with OKEN Scanner

Vom remarca faptul că această noțiune reprezintă o extensie a noțiunii de funcție caracteristică a unei mulțimi A din S. Două mulțimi fuzzy A și B sînt egale dacă $f_A(x) = f_B(x)$, oricare ar fi $x \in S$ și două mulțimi fuzzy A și B sînt în relația $A \subseteq B$ dacă și numai dacă

$$f_A(x) \leqslant f_B(x).$$

Complementara unei mulțimi fuzzy A este mulțimea cu funcția

$$f_{A'}(x) = 1 - f_A(x).$$

Să presupunem că pe mulțimea S avem o 0-închidere și pentru orice $A \subset S$ definim funcția f_A prin

$$f_A(x) = c(x, A)$$

și în acest mod (A, f_A) este o mulțime fuzzy. Următoarea teoremă se demonstrează simplu și arată o legătură mai strînsă între mulțimile fuzzy și 0-închiderile pe mulțimea S.

TEOREMA 3.33. Să presupunem că pe mulțimea S avem familia de mulțimi fuzzy $\{A, f_A\}$ cu proprietățile:

1) $f_\emptyset(x) = 0, \forall\ x \in S,$

2) $f_A(x) = 1, \forall\ x \in A,$

3) $f_A(x) \leqslant f_B(x)\ \forall\ x \in A \leqslant B_1.$

În acest caz

$$0(A, \lambda) = \{x, f_A(x) \geqslant \lambda\}$$

este o 0-închidere pe S continuă la stînga.

Demonstrație. Evidentă.

Vom da acum cîteva exemple și apoi vom arăta că axiomele de la spații bitopologice probabiliste sînt o extensie a celor de la spațiile cvasi-metrice probabiliste de tip Menger și în cazul spațiilor topologice probabiliste a celor de la spațiile metrice probabiliste de tip Menger.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 3.34. Fie S un spaţiu topologic şi să punem

$$\theta(A,\ \lambda) = \begin{cases} S, & \lambda = 0, \\ \mathrm{cl}\, A, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

În acest caz $(S,\ \theta,\ T)$ este un spaţiu topologic probabilist şi θ este continuă la stînga cu

$$T(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1, & \lambda,\ \mu = 0 \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Demonstraţie. Se verifică imediat că sînt îndeplinite toate axiomele de la spaţii topologice probabiliste.

TEOREMA 3.5. Dacă S este o mulţime arbitrară cu mai mult de două puncte, atunci există o θ-închidere pe S astfel ca $(S,\ \theta,\ T)$ să fie un spaţiu topologic probabilist dacă şi numai dacă

$$T_2(\lambda,\ \mu) = 0.$$

Demonstraţie. Fie x_0 şi y_0 două elemente distincte în S şi să punem

$$\theta(A,\ \lambda) = \begin{cases} \theta, & A = \emptyset,\ \lambda \neq 0, \\ \{x_0\} \cup \{y_0\}, & A = \{x_0\},\ \lambda \neq 0, \\ S & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Este uşor de văzut că θ defineşte o θ-închidere. Deoarece

$$\{\{x_0\}^1\}^1 = \{\{x_0\} \cup \{y_0\}\}^1 = S \supset \{x_0\} \cup \{y_0\} = \{x_0\}^\mu,$$

oricare ar fi $\mu \neq 0$, deducem că C_6 nu este adevărată pentru T funcţii cu proprietatea că $T(1,1) > 0$, de unde rezultă afirmaţia noastră şi teorema este demonstrată.

Vom remarca şi faptul că în exemplele date în teoremele de mai sus, θ-închiderile respective sînt continue la stînga. Exemplul din teorema următoare este fără această proprietate.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 3.36. Fie (S, τ) un spaţiu topologic nediscret şi pentru $\lambda_0 \neq 0$ fie

$$\theta(A, \lambda_0) = \begin{cases} \operatorname{cl} A, & \lambda \geqslant \lambda, \\ S, & \lambda < \lambda_0, \end{cases}$$

oricare ar fi $A = \emptyset$ şi

$$\theta(\emptyset, \lambda) = \begin{cases} \emptyset, & \lambda = 0, \\ S, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

În acest caz θ este o θ-închidere care nu este continuă la stînga în λ_0.

Demonstraţie. Este uşor de văzut că avem într-adevăr o θ-închidere şi cum τ nu este topologie discretă există $A \neq \emptyset$ astfel ca $\operatorname{cl} A \subset S$ (incluziune strictă). În acest caz avem însă pentru $\mu < \lambda_0$

$$A^{\lambda_0} = \operatorname{cl} A \subset S = A^{\mu}$$

şi deci $\bigcap_{\mu < \lambda_0} A^{\mu} \supset A^{\lambda_0}$, de unde rezultă că nu avem continuitate la stînga în $\lambda = \lambda_0$. Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă arată legătura între spaţiile cvasi-metrice probabiliste şi θ-închideri pe de o parte şi între spaţiile cvasi-metrice probabiliste de tip Menger şi θ-închideri.

TEOREMA 3.37. Fie (S, F) un spaţiu cvasi-metric probabilist şi să definim

$$c_s'(x, A) = \begin{cases} \inf\limits_{\alpha > 0} \sup\limits_{y \in A} F_{xy}(\alpha), & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset, \end{cases}$$

pentru orice $x \in S$ şi $A \subset S$ şi

$$c_d'(x, A) = \begin{cases} \inf\limits_{\alpha > 0} \sup\limits_{y \in A} F_{yx}(\alpha), & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases}$$

În acest caz $(S, \theta_s, \theta_d, T_z)$ este un spaţiu bitopologic şi θ-închiderile sînt continue la stînga. Dacă (S, F) este de tip Menger cu t-norma T, atunci $(S, \theta_s, \theta_d, T)$ este un spaţiu bitopologic probabilist.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Înainte de a începe demonstrația vom remarca faptul că în cazul $\theta_s = \theta_d$ avem un rezultat stabilit de Frank pentru spații topologice probabiliste. Să trecem acum la verificarea axiomelor.

Cum $c_s'(x, A) = 0 (= \emptyset$ dacă $A = \emptyset$, 1° este evidentă (teorema 3.31). Pentru 2° remarcăm că dacă $x \in A$,

$$c_s'(x, A) = \inf_{\alpha > 0} \sup_{y \in A} F_{xy}(\alpha) = 1$$

și deci axioma este verificată. De asemenea, dacă $A \subseteq B$,

$$c_s'(x, A) = \inf_{\alpha > 0} \sup_{y \in A} F_{xy}(\alpha) \leqslant \inf_{\alpha > 0} \sup_{y \in B} F_{xy}(\alpha) = c_s'(x, A)$$

și deci 3° este adevărată.

Să demonstrăm continuitatea la stînga pentru θ-închiderea c_s'. Pentru $A \neq \emptyset$, $A^\lambda = \{x, \forall \alpha > 0$ există $y \in A$ astfel ca $F_{xy}(\alpha) \geqslant \alpha\}$ și să presupunem că $x \in (A^\mu)^\lambda$. În acest caz pentru α_1, $\alpha_2 > 0$ există $y \in A^\mu$ astfel ca $F_{xy}(\alpha_1) \geqslant \lambda$ și $z \in A$ încît $F_{yz}(\alpha_2) \geqslant \mu$. Pentru $\alpha > 0$ fie $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ și deci pentru un anume z avem

$$F_{xz}(\alpha) \geqslant T\left(F_{xy}\left(\frac{\alpha}{2}\right), F_{yz}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \geqslant T'(\lambda, \mu),$$

de unde $x \in A^{T(\lambda, \mu)}$. Afirmația este astfel demonstrată. Similar se demonstrează afirmațiile pentru c_d'. Teorema este demonstrată.

În capitolul V, referitor la metoda de construcție a spațiilor metrice probabiliste sau cvasi-metrice probabiliste, vom expune și metode de construcție a spațiilor topologice probabiliste sau bitopologice probabiliste.

3.4. Metrizabilitatea spațiilor metrice probabiliste

Fie (X, σ, τ) un spațiu bitopologic (topologic $\sigma = \tau$).

Se spune că spațiul bitopologic (X, σ, τ) (topologic) este cvasi-metrizabil) dacă există perechea p și q de cvasi-metrici conjugate (metrica p) astfel încît σ și τ sînt determinate de p respectiv q ($\sigma = \tau$ este determinată de p).

Scanned with OKEN Scanner

Rezultate privind metrizabilitatea spațiilor topologice sînt foarte multe și noi vom menționa numai că unele dintre acestea sînt datorate unor matematicieni celebri ca Urisohn, Alexandrov, Smirnov, Nagata.

Problema care ne interesează este următoarea: în ce condiții topologia unui spațiu metric probabilist poate fi construită cu ajutorul unei metrici adică în ce condiții spațiul (S, F) este metrizabil. Desigur, apare în mod natural și problema în ce condiții un spațiu (S, F) cvasi-metric probabilist este cvasi-metrizabil.

Vom demonstra mai întîi:

TEOREMA 3.38. Fie $(S, \mathscr{F})$ un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T, avînd proprietatea $\sup_{x<\lambda} T(x, x) = 1$ și să notăm

$$\mathscr{U} = \{U(\varepsilon, \lambda) : \varepsilon > 0, \lambda > 0\}$$

unde

$$U(\varepsilon, \lambda) = \{(p, q); p, q \in S, F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}.$$

În acest caz $\mathscr{U}$ este o familie de uniformități.

Demonstrație. Trebuie deci să verificăm cele cinci axiome [1]).

1) Fie $\Delta = \{(p, p); p \in S\}$ și $U(\varepsilon, \lambda)$ date. Cum pentru orice $p \in S$ și $\varepsilon > 0$, $F_{pp}(\varepsilon) = 1$ este evident că $\Delta \subset U(\varepsilon, \lambda)$ și prima axiomă este verificată.

2) Cum oricare ar fi $p, q \in S$, $F_{pq} = F_{qp}$, axioma a doua este evidentă.

3) Fie $U(\varepsilon, \lambda)$ dată. Să arătăm că putem construi $W \subset U$ astfel ca $W \circ W \subset U$. Fie pentru aceasta $\varepsilon' = \varepsilon/2$ și λ' astfel ca

$$T(1 - \lambda', 1 - \lambda') > 1 - \varepsilon'$$

care are loc deoarece $\sup_{x<1} T(x, x) = 1$ și să considerăm $W = U(\varepsilon' \lambda')$. Să arătăm că W astfel construit satisface axioma 3). Fie deci (p, q) și (q, r) în W; avem relațiile

$$F_{pq}(\varepsilon') > 1 - \lambda',$$

$$F_{qr}(\varepsilon') > 1 - \lambda'.$$

Cum inegalitatea lui Menger este satisfăcută (spațiul (S, F) este de tip Menger) avem

$$F_{pr}(\varepsilon) > T(F_{pq}(\varepsilon'), F_q(\varepsilon') \geqslant T(1 - \lambda', 1 - \lambda') > 1 - \lambda$$

și deci $(p, r) \in U$ adică $W \circ W \subset U$. Axioma este astfel verificată.

[1]) Pentru noțiunea de familie de uniformități, a se vedea Appendix.

Scanned with OKEN Scanner

4) Dacă $U(\varepsilon_1, \lambda_1)$ și $U(\varepsilon_2, \lambda_2)$ sînt date, atunci

$$U(\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \min(\lambda_1, \lambda_2))$$

este conținută la fiecare și astfel axioma (4) este de asemenea verificată.

5) Dacă $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$, atunci este evident că $\mathscr{V} \in \mathscr{U}$.

Vom remarca faptul că $\mathscr{U}$ este separată (sau Hausdorff). În adevăr, dacă p și q sînt puncte distincte, atunci există $\varepsilon_0 > 0$, astfel ca $F_{pq}(\varepsilon_0) \neq 1$ și $F_{pq}(\varepsilon_0) = 1 - \lambda_0$. Deci (p, q) nu este în $U(\varepsilon_0, \lambda_0)$ și afirmația este demonstrată.

Din această teoremă rezultă și:

TEOREMA 3.39. Dacă $(S, \mathscr{F})$ este un spațiu metric probabilist ca în teorema 1.38, atunci familia de mulțimi

$$N_p(\varepsilon, \lambda) = \{q;\ F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

este o bază de vecinătăți pentru topologia pe S, care este și Hausdorff.

Următoarea teoremă dă un răspuns la problema metrizabilității.

TEOREMA 3.40. Dacă $(S, \mathscr{F})$ este un spațiu metric probabilist cu proprietățile din teorema 3.38, atunci topologia cu baza de vecinătăți $\{N(\varepsilon, \lambda)\}$ este metrizabilă.

Teorema 3.40 se poate demonstra cu ajutorul următoarei teoreme de metrizabilitate: dacă $(S, \mathscr{U})$ este un spațiu uniform separat (Hausdorff) și familia sa de uniformități posedă o bază numărabilă atunci el este metrizabil [1].

Evident că, dacă $\{\varepsilon_n\}$ și $\{\lambda_n\}$ sînt două șiruri de numere pozitive care converg către zero, familia

$$\{U(\varepsilon_n, \lambda_n)\}$$

formează o bază numărabilă pentru $\mathscr{U}$. Teorema este astfel demonstrată.

Este cunoscut că, în multe cazuri particulare, unele cantități atașate funcțiilor de repartiție au proprietățile unei metrici. În cele mai multe cazuri acestea sînt mediile, medianele etc.

Vom remarca și faptul că pînă acum, o teoremă de cvasi-metrizabilitate pentru spații cvasi-metrice probabiliste nu a fost obținută; mai general pentru clase de spații bitopologice probabiliste, ar fi interesant de obținut teoreme de cvasi-metrizabilitate.

---

[1] Pentru demonstrație, a se vedea *J. L. Kelley*, General Topology, ch. 6, § 13.

4 Produse de spaţii şi spaţii cît probabiliste

Originea acestor clase de spaţii se află în lucrările lui A. Špaček care a introdus noţiunea de metrică aleatoare şi care constă dintr-o mulţime S împreună cu o măsură definită pe o familie din mulţimea aplicaţiilor produsului cartezian $S \times S$ în R_+ şi astfel ca $\mu(M) = 1$, unde M este mulţimea tuturor aplicaţiilor care sînt matrici.

Printre spaţiile de care ne vom ocupa vom menţiona spaţiile cvasi-metric generate, spaţiile ultra-metrice generate şi E-spaţiile introduse de Sherwood, stabilindu-se şi unele relaţii între aceste spaţii. Un exemplu este prezentat pentru a arăta legătura între t-norme şi spaţiile metric generate.

4.1. Produse de spaţii metrice probabiliste

Problema importantă în definiţia produsului spaţiilor metrice probabiliste este aceea a definirii aplicaţiei F (a se vedea definiţia spaţiului metric probabilist). Au fost propuse diferite metode de a defini o astfel de aplicaţie. Menţionăm că problema construcţiei de spaţii produs a fost considerată pentru prima dată de autorul acestei cărţi şi dezvoltată într-o lucrare [16].

Rezultatul a fost reconsiderat şi dezvoltat de către Egbert [58] şi independent de Xavier [65].

DEFINIŢIA 4.1. Fie (S_1,F_1) şi (S_2,F_2) două spaţii metrice probabiliste iar T o t-normă continuă la stînga. Prin T-produsul spaţiilor (S_1,F_1), (S_2, F_2) vom înţelege perechea ordonată $(S_1 \times S_2,\ T(F_1, F_2)$, unde

$S_1 \times S_2$ este produsul cartezian al mulțimilor S_1 și S_2, iar $T(F_1, F_2)$ este o aplicație de la $(S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2)$ în Δ_+ dată prin

$$T(F_1, F_2)(r, s) = T(F^1_{r_1, s_1}, F^2_{r_2, s_2})$$

dacă $r = (r_1, r_2)$ și $s = (s_1, s_2)$, $r, s \in S_1 \times S_2$.

Vom nota pe scurt aplicația definită mai sus cu F_T.

Are loc:

TEOREMA 4.2. Dacă (S_1, F_1), (S_2, F_2) sînt două spații metrice probabiliste atunci T-produsul lor este un spațiu metric probabilist (în sensul definiției 1.4, Capitolul I).

Demonstrație. Evidentă.

În mod analog se poate obține o teoremă privind spațiile cvasimetrice probabiliste.

TEOREMA 4.3. Dacă (S_1, F_1) și (S_2, F_2) sînt două spații de tip Menger în raport cu aceeași t-normă T, atunci T-produsul lor este un spațiu de tip Menger.

Demonstrație. Este suficient să verificăm inegalitatea (IV_m) În adevăr, pentru $x, y > 0$ și $s = (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$,

$$E_T(r, s)(x + y) = T(F_{r_1 s_1}(x + y), F_{r_2 s_2}(x + y)) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(F_{r_1 p_1}(x), F_{p_1 s_1}(y))), T(F_{r_2 p_2}(x), F_{p_2 s_2}(y)) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(T(F_{r_1 p_1}(x), F_{p_1 s_1}(y)), F_{r_2 p_2}(x)), F_{p_2 s_2}(y)) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(F_{p_1 s_1}(y)\ T(F_{r_1 s_1}(x), F_{r_1 s_2}(x))), F_{p_2 s_2}(y)) =$$

$$= T(T(F_{p_1 s_1}(y), F_{T^{rp}}(x)), F_{p_2 s_2}(y)) =$$

$$= T(F_{T^{rp}}(x), T(F_{p_1 s_1}(y)), F_{p_2 s_2}(y)) = T(F_{T^{rp}}(x), F_{T^{ps}}(y))$$

adică relația (IV_m). Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă imediat următorul:

COROLAR 4.4. Dacă (S_1, F_1) și (S_2, F_2) sînt spații de tip Menger în raport cu t-normele T_1 și T_2 respectiv, iar T este o t-normă cu proprietățile

$$T_1 \geqslant T, \quad T_2 \geqslant T,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci T-produsul spaţiilor (S_1, F_1) şi (S_2, F_2) este un spaţiu de tip Menger.

TEOREMA 4.5. Dacă (S_1, F_1) şi (S_2, F_2) sînt spaţii metrice probabiliste echilaterale generate de aceeaşi funcţie G, atunci T-produsul lor este un spaţiu metric probabilist echilateral pentru $T = \text{Min}$ şi este generat de aceeaşi funcţie G.

Demonstraţie. Fie $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$ în $S_1 \times S_2$ şi să punem

$$F_{rt}(x) = \text{Min}\,(F_{r_1 s_1}(x), F_{r_2 s_2}(x)).$$

Este uşor de văzut că

$$F_{rs}(x) = \begin{cases} G(x), & r \neq s \\ H(x), & r = s \end{cases}$$

şi teorema este demonstrată.

Observaţii. α) t-norma Min este necesară în teoremă deoarece trebuie să avem

$$T(H(x), G(x)) = T(G(x), (x)) = G(x)$$

cu $H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ şi această relaţie este adevărată în general numai pentru $T = \text{Min}$.

β) Faptul că spaţiile echilaterale sînt generate de aceeaşi funcţie G este de asemenea necesar.

Vom da acum rezultate similare privind spaţiile simple.

TEOREMA 4.6. Dacă (S_1, F_1), (S_2, F_2) sînt spaţii metrice probabiliste simple generate de spaţiile metrice (S_1, ρ_1), (S_2, ρ_2) respectiv şi generate de aceeaşi funcţie G, atunci T-produsul lor este un spaţiu metric simplu generat de spaţiul metric $(S_1 \times S_2, \rho = \max(\rho_1, \rho_2))$ şi de aceeaşi funcţie G şi $T = \text{Min}$.

Demonstraţie. Dacă $r, s \in S_1 \times S_2$ atunci $F_{rs} = H$, dacă şi numai dacă $r = s$ şi deci rămîne cazul cînd $r \neq s$.

Vom avea de examinat mai multe cazuri:

1) $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $r_1 \neq s_1$, $r_2 \neq s_2$ şi deci

$$F_{rs}(x) = \text{Min}\, G\left(\frac{x}{\rho_1(r_1, s_1)}\right), \; G\left(\frac{x}{\rho_2(r_2, s_2)}\right) =$$

$$= G\left(\frac{x}{\max(\rho_1(r_1, s_1), \rho_2(s_2, r_2))}\right) = G\left(\frac{x}{\rho(r, s)}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

2) $r_1 = s_1$ şi $r_2 \neq s_2$ şi deci

$$F_{rs}(x) = \operatorname{Min}\left(H(x), G\left(\frac{x}{\rho_2(r_2, s_2)}\right)\right) = G\left(\frac{x}{\max\ 0, \rho_2(r_2, s_2)}\right) = G\left(\frac{x}{\rho(r,s)}\right).$$

3) $r_1 \neq s_1$ şi $r_2 = s_2$. Avem

$$F_{rs}(x) = \operatorname{Min}\left(G\left(\frac{x}{\rho_1(r_1, s_1)}\right), H(x)\right) = G\left(\frac{x}{\max \rho_1(r_1, s_1), 0}\right) = G\left(\frac{x}{\rho(r, s)}\right)$$

şi teorema este demonstrată.

DEFINIŢIA 4.7. O funcţie $G : (-\infty, \infty)$ se spune că este strictă dacă :

1) $G(x) = 0, \ \forall\, x \leqslant 0,$

2) G este strict crescătoare (pe R_+),

3) $\sup\limits_{x \in R_+} G(x) = 1.$

Prin G^* vom însemna inversa restricţiei funcţiei G la $[0, \infty)$. Are loc:

TEOREMA 4.8. Fie (S_1, F_1) şi (S_2, F_2) spaţii metrice probabiliste de tip α-simple cu $\alpha \geqslant 1$ generate de spaţiile metrice (S_1, d_1) şi (S_2, d_2) respectiv, în raport cu aceeaşi funcţie G. Fie T o t-normă strictă cu generatorul aditiv $(G^*)^{-m/\alpha}$ cu $m \geqslant 1$. În acest caz T-produsul $(S_1 \times S_2, F_T)$ este un spaţiu metric probabilist de tip α-simplu generat de spaţiul metric $(S_1 \times S_2, (d_1^m + d_2^m)^{1/m}$ şi funcţia G.

Demonstraţie. Fie $(d_1^m + d_2^m)^{1/m}$ şi $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ puncte distincte în $S_1 \times S_2$ şi să arătăm că

$$F_{pq}(x) = G\left(\frac{x}{d(p, q)}\right).$$

Vom avea de deosebit mai multe cazuri :

1) $p_1 \neq q_1$ şi $p_2 \neq q_2$.

În acest caz

$$F_{pq}(x) = T(G(x/d_1^\alpha(p_1, q_1)), G(x/d_2^\alpha(p_2, q_2)) =$$
$$= f^*(f(G(x/d_1^\alpha(p_1, q_1)) + f(G(x/d_2^\alpha(p_2, q_2)))$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$f = (G^*)^{-m/\alpha} \quad \text{şi} \quad f^* = G(I^{-\alpha/m}),\ I(x) = x.$$

Rezultă că

$$(f \cdot G)(x) = I(x) = x^{-m/\alpha}$$

de unde

$$F_{pq}(x) = f^*(x^{-m/\alpha}(d_1^m(p_1, q_1) + d_2^m(p_2, q_2))) =$$

$$= G(x/(d_1^m(p_1, q_1) + d_2^m(p_2, q_2))^{-\alpha/m}) = G(x/d^\alpha(p, q))$$

şi în acest caz teorema este demonstrată.

2) dacă $p_1 = q_1$ $p_2 \neq q_2$. În acest caz avem

$$F_{pq}(x) = T(H(x), G(x/d_2^\alpha(p_2, q_2))) = G(x/d^\alpha(p, q)).$$

3) dacă $p_1 \neq q_1$ şi $p_2 = q_2$ arătăm ca şi la 2) că afirmaţia este adevărată.

O problemă care apare în mod natural este şi următoarea : este construirea unei teorii a spaţiilor produs cvasi-metrice probabiliste. Este uşor de văzut şi cititorul poate verifica, că se pot defini noţiunile corespunzătoare pentru acest caz. Următoarea problemă este însă mai dificilă. Să presupunem că avem spaţiile metrice probabiliste (S_1, F_1) şi (S_2, F_2) şi topologiile corespunzătoare τ_1 şi τ_2. Care este legătura între topologia spaţiului produs şi topologiile τ_1, τ_2? Dar în cazul spaţiilor cvasi-metrice statistice?

Rezultatul pe care îl dăm se referă la spaţiile cvasi-metrice probabiliste de tip Menger.

TEOREMA 4.9. Fie (S_1, F_1) şi (S_2, F_2) două spaţii cvasi-metrice probabiliste de tip Menger în raport cu aceeaşi t-normă T continuă la stînga şi $(S_1 \times S_2, F_T)$ T-produsul lor care este de asemenea un spaţiu cvasi-metric probabilist de tip Menger şi $\mathcal{D}_1^2$ şi $\mathcal{D}_2^2$ topologiile ataşate spaţiilor $(S_1 F_1)$ şi (S_2, F_2) respectiv. Dacă B_1' este mulţimea $N_{1,s_0^1}^1(\varepsilon, \lambda)$ vecinătăţilor punctelor $s_0^1 \in S_1$ şi $N_{1,s_0^2}^2(\varepsilon, \lambda)$ vecinătăţilor din S_2, notate cu B_2' atunci $B_1' \times B_2'$ generează (ε, λ) topologia pe produsul cartezian $(S_1 \times S_2, F_T)$.

Deoarece demonstraţia pentru spaţii cvasi-metrice este (aproape) aceeaşi cu cea de la spaţii metrice vom da demonstraţia în acest caz.

Scanned with OKEN Scanner

Cum T este continuă, $B_1' \times B_2'$ și vecinătățile (ε, λ) în produsul cartezian sînt baze ale topologiilor respective, pentru a arăta că ele induc aceeași topologie este suficient să arătăm că pentru orice B în $\{\varepsilon, \lambda\}$ vecinătați există $B' \in B_1' \times B_2'$ astfel ca $B' \in B$ și reciproc.

Fie atunci $A_1 \times A_2$ element în (ε, λ) vecinătăți și deci există $N_{p_1}(\varepsilon_1, \lambda_1)$ și $N_{p_2}(\varepsilon_2, \lambda_2)$ situate în A_1 respectiv A_2 și să punem

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad \lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$$

iar $p = p(p_1, p_2)$. Să arătăm că $N_p(\varepsilon, \lambda)$ este în $A_1 \times A_2$. Pentru aceasta fie q în $N_p(\varepsilon, \lambda)$ și deci, dată definiția produsului de spații metrice probabiliste

$$F_{p_1 q_1}(\varepsilon) = T(F_{p_1 q_1}(\varepsilon_1), 1) \geqslant T(F_{p_1 q_1}(\varepsilon_1), F_{p_2 q_2}(\varepsilon_2)) \geqslant$$

$$\geqslant T(F_{p_1 q_1}(\varepsilon), F_{p_2 q_2}(\varepsilon)) = F_{qq}(\varepsilon) > 1 - \lambda \geqslant 1 - \lambda_1.$$

În mod analog

$$F_{p_2 q_2}(\varepsilon) > 1 - \lambda_2$$

de unde deducem că $q_1 \in N_{pq}(\varepsilon_1, \lambda_1)$ și $q_2 \in N_{p_2}(\varepsilon_2, \lambda_2)$ și prima afirmație este demonstrată.

Să demonstrăm și afirmația contrară. Fie deci $N_p(\varepsilon, \lambda)$, (ε, λ) o vecinătate și cum T este continuă la stînga, deducem că există $\eta > 0$ astfel ca

$$T(1 - \eta, 1 - \eta) > 1 - \lambda.$$

Dacă $q = (q_1, q_2) \in N_{p_1}(\varepsilon, \lambda) \times N_{p_2}(\varepsilon, \lambda)$ atunci

$$F_{pq}(\varepsilon) = T(F_{p_1 q_1}(\varepsilon), F_{p_2 q_2}(\varepsilon)) \geqslant T(1 - \eta, 1 - \eta) > 1 - \lambda,$$

de unde deducem că $q \in N_p(\varepsilon, \lambda)$ și $N_{p_1}(\varepsilon, \lambda) \times N_{p_2}(\varepsilon, \lambda) \leqslant N_p(\varepsilon, \lambda)$, afirmația este demonstrată și cu aceasta teorema.

Observație. Este evident că toate considerațiile expuse sînt adevărate pentru produse finite de spații. Este o problemă deschisă dacă se pot considera produse infinite de spații metrice probabiliste.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Mulțimi în spații metrice probabiliste și distanța probabilistă între mulțimi

Dacă (S, ρ) este un spațiu metric complet și K_I familia mulțimilor închise, care sînt și mărginite, atunci se poate introduce pe K_I o funcție ρ^* în așa fel ca (K_I, ρ^*) să fie un spațiu metric complet dacă ne restrîngem la clasa mulțimilor compacte. O astfel de metrică a fost considerată pentru prima dată de D. Pompeiu și studiată în cazul general de F. Hausdorff. Această metrică, foarte utilă în multe probleme în care avem de a face cu funcții cu valori mulțimi, se numește metrica Hausdorff-Pompeiu.

Pentru proprietățile acestei funcții ρ^* a se vedea [110, Cap. VII].

Se pune problema dacă în cazul spațiilor metrice probabiliste se poate introduce o „distanță" care să fie în spiritul conceptului de spațiu metric probabilist introdus de K. Menger, adică distanța să fie descrisă probabilist.

În cele ce urmează vom arăta cum se poate face acest lucru.

Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu o t-normă T cu proprietatea de a fi continuă și $A \subset S$ pe care o presupunem nevidă.

DEFINIȚIA 4.10. Funcția D_A definită prin

$$D_A(x) = \sup_{t<s} \inf_{p,q \in A} F_{pq}(t)$$

va fi numită diametru probabilist al mulțimii A.

Următoarele teoreme au demonstrații simple și de aceea le omitem.

TEOREMA 4.11. Funcția D_A este o funcție de repartiție.

TEOREMA 4.12. Dacă A este nevidă atunci $D_A = G$[cap. I, pag. 15] dacă și numai dacă A se reduce la un punct.

TEOREMA 4.13. Dacă $A \leqslant B$ și sînt nevide atunci $D_A \geqslant D_B$.

Prin următoarea definiție se introduc clase de submulțimi în S.

DEFINIȚIA 4.14. O submulțime $A \subset S$ se spune că este mărginită dacă $\sup_x D_A(x) = 1$, semimărginită dacă $\sup_x D_A(x) \in (0,1)$ și nemărginită dacă $D_A = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Are loc:

TEOREMA 4.15. Dacă A și B sînt submulțimi ale lui S și $A \cap B \neq \emptyset$ atunci:

$$D_{A \cup B}(x + y) \geqslant T(D_A(x), D_B(y)).$$

Demonstrație. Pentru a demonstra relația de mai sus, fie x și y arbitrari. Vom demonstra mai întîi că

$$\inf_{p,q \in A \cup B} F_{pq}(x + y) \geqslant T(\inf_{p,q \in A} F_{pq}(x), \inf_{p,q \in B} F_{pq}(y)). \tag{4.15.1}$$

Vom avea de considerat două cazuri:

$$(\alpha) \qquad \inf_{p,q \in A \cup B} F_{pq}(x + y) = \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B}} F_{pq}(x + y)$$

$$(\beta) \qquad \inf_{p,q \in A \cup B} F_{pq}(x + y) < \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B}} F_{pq}(x + y).$$

În primul caz, fie $r \in S$ și deci

$$F_{pq}(x + y) \geqslant T(F_{pr}(x), F_{qr}(y)).$$

Luînd în această inegalitate inferiorul după $p \in A$, $q \in B$ și $r \in A \cup B$ deducem că

$$\inf_{p,q \in A \cup B} F_{pq}(x + y) \geqslant \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B \\ r \in A \cup B}} T(F_{pr}(x), F_{qr}(y))$$

și cum T este continuă deducem că

$$\inf_{p,q \in A \in B} F_{pq}(x + y) \geqslant T(\inf_{p,r \in A} F_{pr}(x), \inf_{q,r \in B} F_{qr}(y))$$

și afirmația teoremei este demonstrată în acest caz.

În cel de al doilea caz, una din următoarele relații are loc

$$\inf_{p,q \in A \cup B} F_{pq}(x + y) = \inf_{\substack{p \in A \\ q \in B}} F_{pq}(x + y)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\inf_{p,q\in A\cup B} F_{pq}(x+y) = \inf_{p,q\in B} F_{pq}(x+y).$$

Dacă prima relaţie are loc, atunci

$$\inf_{p,q\in A\cup B} F_{pq}(x+y) \geqslant T\left(\inf_{p,q\in A} F_{pq}(x), H(y)\right) \geqslant T\left(\inf_{p,q\in A} F_{pq}(x), \inf_{p,q\in B} F_{pq}(y)\right)$$

şi afirmaţia este demonstrată în acest caz.

Dacă are loc a doua relaţie,

$$\inf_{p,q\in A\cup B} F_{pq}(x+y) \geqslant T\left(\inf_{p,q\in B} F_{pq}(x), H(y)\right) \geqslant T\left(\inf_{p,q\in B} F_{pq}(x), \inf_{p,q\in A} F_{pq}(y)\right)$$

şi afirmaţia privind inegalitatea (4.15.1) este demonstrată.

Pentru a demonstra teorema vom remarca faptul că

$$\{(t,s),\ 0\leqslant s\leqslant x,\ 0\leqslant t\leqslant y\}\subset\{(s,t),\ s+t\leqslant x+y\}$$

iar din relaţia (4.15.1) obţinem

$$D_{A\cup B}(x+y) = \sup_{s+t<x+y} [\inf_{p,q\in A\cup B} F_{pq}(s+t)] \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{s<x\\ t<y}} [\inf_{p,q\in A\cup B} F_{pq}(s+t)] \geqslant T\left(\sup_{s<x} \inf_{p,q\in A} F_{pq}(s), \sup_{t<y} \inf_{p,q\in B} F_{pq}(t)\right) \geqslant$$

$$\geqslant T(D_A(x), D_B(y))$$

şi teorema este demonstrată.

Este cunoscut că în spaţiile metrice, pentru orice mulţime A, diametrul său este egal cu diametrul închiderii $\bar{A}$. Următoarea teoremă extinde acest rezultat la cazul spaţiilor metrice probabiliste.

TEOREMA 4.16. Pentru orice mulţime $A\subset S$ avem $D_A(x) = D_{\bar{A}}(x)$.

Demonstraţie. Cum $A\subset\bar{A}$ rezultă că avem $D_{\bar{A}}\leqslant D_A$. Să arătăm că are loc şi inegalitatea inversă. Fie $\eta>0$. Cum F este uniform continuă în raport cu metrica lui Lévy există $\varepsilon>0$ şi $\lambda>0$, astfel ca oricare ar fi p_1, p_2, p_3, p_4 din S cu proprietatea că

$$F_{p_1 p_3}(\varepsilon) > 1 - \lambda, \quad F_{p_2 p_4}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

să avem relaţia

$$L(F_{p_1 p_2}, F_{p_3 p_4}) < \eta.$$

Dacă $p \in A$ să considerăm $p(\bar{p}) \in A$ astfel ca $F_{p(\bar{p})\bar{p}}(\varepsilon) > 1 - \lambda$. Pentru orice $\bar{p}$, $\bar{q}$ avem

$$L\left(F_{p(\bar{p})q(\bar{q})}, F_{\bar{p}\bar{q}}\right) < \eta.$$

şi deci pentru orice t avem

$$F_{p(\bar{p})\,q(\bar{q})}(t - \eta) - \eta < F_{\bar{p}\bar{q}}(t).$$

Fie $A\eta = \{p(\bar{p}),\ \bar{p} \in A\}$ care este în A. Avem

$$\inf_{\bar{p},\,\bar{q} \in A} F_{pq}(t) \geqslant \inf_{\bar{p},\,\bar{q} \in A} F_{p(\bar{p})\,q(\bar{q})}(t - \eta) - \eta = \inf_{p,\,q \in A} F_{pq}(t - \eta) - \eta \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{p,\,q \in \overline{A}} F_{pq}(t - \eta) - \eta.$$

Luînd superiorul pentru $t < x$ în această inegalitate obţinem

$$D_A(x) = \sup_{t<x} \inf_{\bar{p},\,\bar{q} \in A} F_{\bar{p}\bar{q}}(t) \geqslant \sup_{t<x} \inf_{p,\,q \in A} F_{pq}(t - \eta) - \eta =$$

$$= \sup_{t<x-\eta} \inf_{p,q \in A} F_{pq}(t) - \eta = D_A(x - \eta) - \eta.$$

Cum relaţia este adevărată oricare ar fi η iar D_A, este continuă la stînga rezultă că

$$D_{\overline{A}}(x) \geqslant D_A(x)$$

şi teorema este astfel demonstrată.

Vom defini acum noţiunea de distanţă probabilistă între mulţimi ale spaţiului metric probabilist (S, F), reprezentînd extensia noţiunii de distanţă Hausdorff-Pompeiu de la submulţimile unui spaţiu metric.

DEFINIŢIA 4.17. Dacă A şi B sînt submulţimi ale spaţiului metric probabilist (S, F) de tip Menger în raport cu t-norma T continuă, atunci distanţa probabilistă între A şi B este funcţia

$$F_{AB}(x) = \sup_{t<x} T(\inf_{p\in A} \sup_{q\in B} F_{pq}(t), \inf_{q\in B} \sup_{p\in A} F_{pq}(t)).$$

Demonstrațiile următoarelor teoreme fiind simple le omitem.

TEOREMA 4.18. F_{AB} este o funcție de repartiție.

TEOREMA 4.19. Dacă A, $B \subset S$ și sînt nevide atunci

$$F_{AB} = F_{BA}.$$

TEOREMA 4.20. Dacă A este în S nevidă, atunci

$$F_{AA} = G.$$

Teorema următoare extinde la cazul spațiilor metrice probabiliste un fapt cunoscut pentru spațiile metrice.

TEOREMA 4.21. Dacă A și B sînt două submulțimi nevide în S atunci

$$F_{AB} = F_{\overline{AB}}.$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că

$$F_{AB} = F_{A\overline{B}}$$

deoarece, dacă acest lucru este adevărat avem

$$F_{A\overline{B}} = F_{\overline{B}A} = F_{\overline{AB}} = F_{AB}.$$

Să arătăm că are loc relația

$$F_{A\overline{B}} \leqslant F_{AB}.$$

În adevăr, cum $B \subseteq B$ oricare ar fi t avem

$$\inf_{q\in B} [\sup_{p\in A} F_{pq}(t)] \geqslant \inf_{\overline{q}\in B} [\sup_{\overline{p}\in A} F_{\overline{p}\overline{q}}(t)] \qquad (4.21.1)$$

Fie $\eta > 0$ arbitrar. Pentru $\overline{q} \in B$ există $q(\overline{q})$ în B astfel ca

$$F_{p\overline{q}}(t-\eta) - \eta \leqslant F_{pq_{(\overline{p})}}(t)$$

oricare ar fi t. Să punem

$$B_\eta = \{q(\bar{q}),\ \bar{q} \in \bar{B}\}$$

și deci $B_\eta \subset B$, de unde rezultă că

$$\sup_{\bar{q} \in \bar{B}} F_{p\bar{q}}(t-\eta) - \eta \leqslant \sup_{\bar{q} \in \bar{B}} F_{p\bar{q}}(t) = \sup_{q \in B_\eta} F_{pq}(t) \leqslant \sup_{q \in B} F_{pq}(t).$$

Prin urmare

$$\inf_{p \in A}[\sup_{\bar{q} \in \bar{B}} F_{p\bar{q}}(t-\eta) - \eta] \leqslant \inf_{p \in A}[\sup_{q \in B} F_{pq}(t)]$$

și luînd sup pentru $t < x$ în această inegalitate, obținem că pentru orice $\eta > 0$

$$f(x) = \sup_{t<x} (\inf_{p \in A} [\sup_{q \in B} F_{pq}(t)] \geqslant \sup_{t<x} (\inf_{p \in A} [\sup_{q \in B} F_{pq}(t-\eta) - \eta]) =$$

$$= \sup_{t<x-\eta} (\inf_{p \in A} \sup_{\bar{q} \in \bar{B}} F_{p\bar{q}}(t)) - \eta = g(x-\eta) - \eta.$$

Cum f și g sînt continue la stînga și η arbitrar, deducem că $f(x) \geqslant g(x)$. De aici și din (4.21.1) rezultă că

$$F_{AB}(x) = T(\sup_{t<x} (\inf_{p \in A} [\sup_{q \in B} F_{qp}(t)]), \sup_{t<x} (\inf_{q \in B} [\sup_{p \in A} F_{pq}(y)])) \geqslant$$

$$\geqslant T(\sup_{t<x} (\inf_{p \in A} [\sup_{\bar{q} \in \bar{B}} F_{p\bar{q}}(t)]), \sup_{t<x} (\inf_{\bar{q} \in \bar{B}} [\sup_{p \in A} F_{p\bar{q}}(t)])) =$$

$$\sup_{t<x} T(\inf_{p \in A} [\sup_{\bar{q} \in \bar{B}} F_{p\bar{q}}(t)], \inf_{\bar{q} \in \bar{B}} [\sup_{p \in A} F_{p\bar{q}}(t)]) = F_{A\bar{B}}(x).$$

În mod similar arătăm că are loc și inegalitatea inversă, $F_{A\bar{B}} \geqslant F_{AB}$, de unde rezultă și egalitatea lor.

Are loc de asemenea și:

TEOREMA 4.22. Dacă A și B sînt mulțimi nevide în S atunci $F_{AB} = G$ dacă și numai dacă $\bar{A} = \bar{B}$.

Demonstrație. Fie $F_{AB} = H$ și $\varepsilon > 0$ arbitrar. În acest caz

$$1 = F_{AB}(\varepsilon) = T\left(\sup_{t<\varepsilon}\left(\inf_{p\in A}\left[\sup_{q\in B} F_{pq}(t)\right]\right), \sup_{t<\varepsilon}\left(\inf_{q\in B}\left[\sup_{p\in A} F_{pq}(t)\right]\right)\right) =$$

$$= \sup_{t<\varepsilon}\left(\inf_{q\in B}\left[\sup_{p\in A} F_{pq}(t)\right]\right) = \inf_{q\in B}\sup_{p\in A} F_{pq}(\varepsilon)$$

de unde rezultă că pentru orice $q \in B$ și $\lambda > 0$ există $p \in A$ astfel ca

$$F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda.$$

Prin urmare $q \in \bar{A}$ de unde rezultă că $B \subseteq \bar{A}$. Similar deducem că $\bar{B} \supseteq A$ și deci $\bar{A} = \bar{B}$.

Dacă $\bar{A} = \bar{B}$ atunci este evident că $F_{AB} = H$.

Următoarea teoremă permite să înzestrăm spațiul submulțimilor unui spațiu metric probabilist (S, F) de tip Menger cu o structură de spațiu metric probabilist de tip Menger.

TEOREMA 4.23. Dacă A, B, C sînt submulțimi nevide în S, atunci pentru orice x, y avem relația

$$F_{AB}(x + y) \geqslant T(F_{AC}(x), F_{BC}(y)).$$

Demonstrație. Cum (S, F) este un spațiu de tip Menger rezultă că oricare ar fi $u, v > 0$ și $p, q, r \in S$ avem

$$F_{pq}(u + v) \geqslant T(F_{pr}(u), F_{qr}(v)).$$

Cum T este presupusă monotonă în fiecare variabilă și continuă rezultă că

$$\sup_{q\in B} F_{pq}(u + v) \geqslant T\left(\sup_{r\in C} F_{pr}(u), \inf_{r\in C}\left[\sup F_{qr}(v)\right]\right).$$

În consecință luînd inferiorul și ținînd seama de aceleași proprietăți ale lui T, obținem

$$\inf_{p\in A}\left[\sup_{q\in B} F_{pq}(u + v)\right] \geqslant T\left(\inf_{p\in A}\left[\sup_{r\in C} F_{pr}(u)\right], \inf_{r\in C}\left[\sup_{q\in B} F_{qr}(v)\right]\right).$$

De asemenea are loc și

$$\inf_{q\in B}\left[\sup_{p\in A} F_{pq}(u + v)\right] \geqslant T\left(\inf_{r\in C}\left[\sup_{p\in A} F_{pr}(u)\right], \inf_{q\in B}\left[\sup_{r\in C} F_{qr}(v)\right]\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

care se demonstrează în mod similar.

Cum T este asociativă rezultă că

$$T(\inf_{p\in A}[\sup_{q\in B}F_{pq}(u+v)],\ \inf_{q\in B}[\sup_{p\in A}F_{pq}(u+v)]) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(\inf_{p\in A}[\sup_{r\in C}F_{pr}(u)],\ \inf_{r\in C}[\sup_{p\in A}F_{pr}(u)]),$$

$$T(\inf_{q\in B}[\sup_{r\in C}F_{qr}(v)],\ \inf_{r\in C}[\sup_{q\in B}F_{qr}(v)])$$

şi

$$F_{AB}(x+y)=\sup_{u+v<x+y}T(\inf_{p\in A}[\sup_{q\in B}F_{pq}(u+v)],\ \inf_{p\in B}[\sup_{q\in B}F_{pq}(u+v)])\geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{u<x\\ v<y}}T(\inf_{p\in A}[\sup_{q\in B}F_{pq}(u+v)],\ \inf_{q\in B}[\sup_{p\in A}F_{pq}(u+v)])=$$

$$=T\{(\sup_{u<x}T(\inf_{p\in B}[\sup_{r\in C}F_{pr}(u)]),\ \inf_{r\in C}[\sup_{p\in A}F_{pr}(u)]),\ \sup_{r<y}$$

$$\sup_{v<y}T(\inf_{q\in B}[\sup_{r\in C}F_{qr}(v)],\ \inf_{r\in C}[\sup_{q\in B}F_{qr}(v)])\}=T(F_{AC}(x),\ F_{BC}(y))$$

şi teorema este astfel demonstrată.

Din teoremele demonstrate mai sus rezultă imediat următorul rezultat foarte important pe care îl dăm sub forma de:

TEOREMA 4.24. Dacă F_C este familia mulţimilor închise ale unui spaţiu metric probabilist atunci (F_C, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T.

Demonstraţie. Aplicaţia F a produsului cartezian $F_C \times F_C$ în Δ este dată prin: oricare ar fi $(A, B) \in F_C \times F_C$ să punem

$$F(A, B) = F_{AB}$$

şi din teoremele 4.18, 4.19, 4.20, 4.22 şi 4.23 rezultă afirmaţia teoremei.

4.3. Spaţii cît ale unui spaţiu metric probabilist

Este cunoscut că fiind dat un spaţiu metric (X, ρ) şi R o relaţie de echivalenţă în x, atunci mulţimea claselor de echivalenţă este un spaţiu care poate fi înzestrat cu o metrică. Apare

problema dacă o astfel de construcţie poate fi făcută în cadrul spaţiilor metrice probabiliste sau cvasi-metrice probabiliste.

În cele ce urmează vom arăta cum se poate face acest lucru. În lucrarea [5], K. Menger a introdus trei tipuri de relaţii între punctele unui spaţiu metric probabilist. Acestea sînt date în:

DEFINIŢIA 4.25. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist, p şi q puncte în S, iar

$$t_{pq} = \sup \{x,\ F_{pq}(x) = 0\},$$

atunci:

1) p şi q sînt cu certitudine distincte dacă $t_{pq} > 0$,

2) p şi q sînt abia distincte dacă $t_{pq} = 0$ şi $F_{pq}(0^+) = 0$,

3) p şi q sînt probabil nedistincte dacă $t_{pq} = 0$ şi $F_{pq}(0^+) > 0$.

Este evident că, deoarece $F_{pq}(0^+) = 1$ şi $F_{pq} = F_{qp}$, relaţie definită la punctul 3), este simetrică şi reflexivă.

Următoarea teoremă dă o condiţie suficientă ca să avem în fapt o relaţie de echivalenţă. Vom nota relaţia de la punctul 3), pCq.

TEOREMA 4.26. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T avînd proprietatea

$$T(x, y) > 0 \text{ dacă } x > 0 \text{ şi } y > 0 \tag{4.26.1}$$

atunci C este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie. Din observaţiile de mai sus rezultă că este suficient să demonstrăm că C este o relaţie tranzitivă.

Să presupunem deci că avem pCq şi qCr. Să arătăm că are loc şi pCr. În adevăr, cum $F_{pq}(0^+) > 0$ şi $F_{qr}(0^+) > 0$ din faptul (S, F) este un spaţiu de tip Menger rezultă că

$$F_{pr}(x) \geqslant T(F_{pq}(y),\ F_{qr}(x - y)) \geqslant T(F_{pq}(0^+),\ F_{qr}(0^+)) > 0,$$

de unde rezultă că pcr şi teorema este demonstrată.

De asemenea are loc:

TEOREMA 4.27. C este o relaţie de echivalenţă în orice spaţiu metric probabilist de tip Wald.

Demonstraţie. Este cunoscut că orice spaţiu metric probabilist de tip Wald este şi de tip Menger pentru t-norma $T(x, y) = xy$, care satisface evident condiţiile teoremei de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Următoarea teoremă dă o legătură între spațiile metrice și spațiile metrice probabiliste de tip Menger.

TEOREMA 4.28. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T cu proprietatea (4.26.1), atunci oricare ar fi $p, q, r \in S$

$$t_{pr} \leqslant t_{pq} + t_{qr}.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și $p, q, r \in S$. Atunci

$$F_{pr}(t_{pq} + t_{qr} + \varepsilon) \geqslant T\left(F_{pq}\left(t_{pq} + \frac{\varepsilon}{2}\right), F_{qr}\left(t_{qr} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) > 0$$

și deci

$$t_{pq} + t_{qr} + \varepsilon \geqslant t_{qr}.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă imediat:

TEOREMA 4.29. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist ca în teorema 4.28, atunci (S, t) este un spațiu metric dacă și numai dacă orice pereche de puncte distincte sînt sigur distincte.

Înainte de a începe demonstrația, să notăm că funcția t pe $S \times S$ este dată de relația

$$t(p, q) = t_{pq}.$$

Demonstrație. Evident că $t_{pp} = 0$ și $t_{pq} = t_{qp}$. Din teorema 4.26, rezultă că t satisface și inegalitatea triunghiului de unde rezultă că (S, T) este un spațiu metric.

Să presupunem acum că p și q sînt cu certitudine distincte și deci $t_{pq} > 0$ oricare ar fi $p \neq q$. Cum t are proprietățile unei metrici, teorema este demonstrată.

Rezultatul obținut permite să definim o nouă relație de echivalență și anume

$$pdq \Leftrightarrow t_{pq} = 0,$$

oricare ar fi $p, q \in (S, F)$ un spațiu metric probabilist de tip Menger cu proprietatea (4.26.1).

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele obținute pun problema naturii spațiului claselor de echivalență ale elementelor dintr-un spațiu metric probabilist.

Vom demonstra mai întîi:

TEOREMA 4.30. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger cu proprietatea (α) și

$$\sup_{x<1} T(x, x) = 1,$$

atunci elementele care sînt în aceeași clasă de echivalență în raport cu relația D sînt submulțimi închise în topologia (ε, λ).

Demonstrație. Fie deci $p \in S$ și

$$W = \{q,\ q \in S,\ p\, d\, q\} = \{q, t_{qv} = 0\}.$$

Să arătăm că $S - W = C_W$ este deschisă. Fie $v \notin W$ și deci $t_{pr} > 0$, iar $F_{pr}(t_{pr}) = 0$. Fie $z \in (0, t_{pr})$ și $\varepsilon \in (0, t_{pr} - z)$ iar $\lambda \in (0,1)$. Să luăm un punct $q \in N_r(\varepsilon)$ cu $F_{sr}(\varepsilon) > 1 - \lambda$. În acest caz

$$0 = F_{pr}(t_{pr}) \geqslant T(F_{ps}(z),\ F_{sr}(t_{pr} - z)) \geqslant$$

$$\geqslant T(F_{ps}(z),\ F_{sr}(\varepsilon)) \geqslant T(F_{ps}(z),\ 1 - \lambda) > 0,$$

care ne dă că $F_{ps}(z) = 0$, de unde rezultă că $t_{pr} \geqslant z > 0$. Deci vecinătatea $N_r(\varepsilon, \lambda)$ a punctului r este în C_W și deci C_W este o mulțime deschisă. Teorema este astfel demonstrată.

Rezultatul obținut mai sus furnizează exemple de mulțimi închise într-un spațiu metric probabilist.

O altă relație de echivalență între punctele unui spațiu metric probabilist se poate introduce utilizînd comportarea funcțiilor de repartiție la ∞.

DEFINIȚIA 4.31. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist și p, q puncte în S iar

$$s_{pq} = \sup\{x, F_{pq}(x) < 1\},$$

$$F_{pq}(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_{pq}(x).$$

În acest caz punctele p și q se spun că sînt la distanța:

1° probabil infinită dacă $F_{pq}(\infty) < 1$,

2° abia finită dacă $s_{pq} = \infty$ și $F_{pq}(\infty) = 1$,

3° sigur finită dacă $s_{pq} < \infty$.

Putem defini două relații între punctele spațiului S astfel:

(C') $pC'q$ dacă și numai dacă distanța între p și q este sigur finită, adică are loc 3°,

(D') $pC'q$ dacă și numai dacă distanța între p și q nu este probabil infinită, adică dacă și numai dacă $F_{pq}(\infty) = 1$.

Are loc:

TEOREMA 4.32. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger, atunci (C') este o relație de echivalență.

Demonstrație. Faptul că (C') este reflexivă și simetrică este evident. Să arătăm că este și tranzitivă. Fie deci p, q, r în S astfel că au loc $pC'q$ și $qC'r$. Să arătăm că are loc și $pC'r$. În adevăr, cum avem că $s_{pq} < \infty$ și $s_{qr} < \infty$, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$F_{pr}(s_{pq} + s_{qr} + \varepsilon)\ T\left(F_{pq}\left(s_{pq} + \frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{qr}\left(s_{qr} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = T(1,1) = 1$$

și deci $s_{pr} < s_{pq} + s_{qr} + \varepsilon$. Cum ε este arbitrar, teorema este demonstrată.

Să definim pentru orice $p, q \in S$

$$s(p, q) = s_{pq}.$$

Are loc:

TEOREMA 4.33. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist și oricare două puncte sînt în relația (C'), atunci (S, s) este un spațiu metric.

Demonstrație. Faptul că s satisface inegalitatea triunghiului, rezultă din demonstrația teoremei de mai sus. De asemenea este evident că s este simetrică. Să arătăm că $s(p, q) = 0$, dacă și numai dacă $p = q$. În adevăr, dacă $s_{pq} = 0$, atunci $\sup\{x, F_{pq}(x) < 1\} = 0$ și deci $F_{pq}(0^+) = 1$, de unde rezultă că $F_{pq} = H$ și deci $p = q$. Teorema este demonstrată.

În legătură cu relația (D') putem demonstra:

TEOREMA 4.34. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T care este continuă, atunci (D') este o relație de echivalență.

Demonstrație. Este evident că (D') are proprietatea de a fi simetrică și reflexivă. Să arătăm că este și tranzitivă. Fie deci p, q, $r \in S$ astfel că $pD'q$ și $qD'r$. au loc. Cum pentru orice $x > 0$ avem

Scanned with OKEN Scanner

$$F_{pr}(x) \geqslant T\left(F_{pq}\left(\frac{x}{2}\right),\ F_{qr}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

iar T este continuă, deducem că

$$F_{pr}(\infty) \geqslant T(F_{pq}(\infty),\ F_{qr}(\infty)) = T(1,1) = 1$$

şi deci pD'r este adevărată. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 4.35. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T continuă, atunci clasele de echivalenţă în raport cu relaţia (D') sînt submulţimi închise în raport cu topologia (ε, λ).

Demonstraţie. Cum T este o funcţie continuă pe o mulţime mărginită şi închisă, este şi uniform continuă. Fie $p \in S$ iar $\mathscr{D}(p) = \{q,\ p\, d'\, q\}$. Să arătăm că $\mathscr{D}(p)$ este o mulţime închisă, ori ceea ce este acelaşi lucru, că $C_{\mathscr{D}(p)}$ este o mulţime deschisă. Fie deci $r \in S - \mathscr{D}(p) = C_{\mathscr{D}(p)}$. Există λ astfel ca $F_{pr}(\infty) = 1 - \lambda$ şi cum T este uniform continuă iar $T(a, 1) = a$, există $\varepsilon > 0$ astfel ca $T(a, 1-\varepsilon) > a - \frac{\lambda}{2}$, oricare ar fi $a \in [0,1]$. Fie $q, N_r(\varepsilon, \varepsilon)$ şi $x > \varepsilon$. Vom avea

$$F_{pr}(2x) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(x)) \geqslant T(F_{pq}(x),\ 1 - \varepsilon) \geqslant F_{pq}(x) - \frac{\lambda}{2}$$

şi făcînd $x \to \infty$, obţinem

$$1 - \lambda = F_{pr}(\infty) \geqslant F_{pq}(\infty) - \frac{\lambda}{2}$$

şi deci $F_{pq}(\infty) \leqslant 1 - \frac{\lambda}{2}$. De aici rezultă că $q \notin C_{\mathscr{D}(p)}$ şi deci $N_r(\varepsilon, \varepsilon) \subset \subset S - \mathscr{D}(p)$, care este astfel o mulţime deschisă. Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă dă un rezultat asemănător cu cel din teorema 4.30.

TEOREMA 4.36. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T continuă şi $T(a, b) > 0$, dacă $a, b > 0$, atunci pentru orice $p \in S$

$$C(p) = \{q,\ pCq\}$$

sînt mulţimi închise.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $p \in S$ și $C(p) = \{q,\ pcq\}$. Trebuie să arătăm, ca și mai sus, că $C_{C(p)} = S - C(p)$ este deschisă. Fie pentru aceasta $r \in C_{C(p)}$ arbitrar. În acest caz $F_{pr}(0^+) = 0$ și deci F_{pr} este o funcție continuă în $x = 0$ și deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu $F_{pr}(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\lambda > 0$, astfel încît oricare ar fi $a \in [0,1]$ să avem

$$T(a\ 1 - \lambda) > a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $q \in N_r\left(\delta \cdot \frac{1}{2}, \lambda\right)$ de unde

$$\frac{\varepsilon}{2} F_{rp}(\delta) \geqslant T\left(F_{pq}\left(\frac{\delta}{2}\right),\ F_{qr}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) \geqslant T\left(F_{pq}\left(\frac{\delta}{2}\right),\ 1 - \lambda\right) \geqslant$$

$$\geqslant F_{pq}\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca

$$F_{pq}\left(\frac{\delta}{2}\right) < \varepsilon$$

și deci $F_{pq}(0^+) = 0$, de unde rezultă că $q \in S - C_{C(p)}$, adică $N_r\left(\frac{\delta}{2}, \lambda\right) \subset$ $\subset S - C(p)$ care este astfel o mulțime deschisă. Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă unele informații privind clasele de echivalență în raport cu relația (C').

TEOREMA 4.37. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T continuă și $p \in S$ iar

$$C'(p) = \{q,\ p\ c'\ q\}$$

și există M astfel ca pentru orice $u, v \in C'(p)$, $F_{uv}(x) = 1$ dacă $x \in M$, atunci $C'(p)$ este închisă în topologia (ε, λ).

Demonstrație. Fie $q \in C'(p) =$ închiderea mulțimii $C'(p)$ și care nu este în $C'(p)$. În acest caz $F_{pq}(x) < 1$, oricare ar fi x finit și deci pentru orice $t > 0$ există $\varepsilon > 0$ astfel ca $F_{pq}(t + M) > 1 - \varepsilon$. Cum $q \in C'(p)$ există $u \in C'(p)$ astfel ca $F_{qu}(t) < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum avem

$$1-\varepsilon > F_{pq}(t+M) \geqslant T(F_{pu}(M), F_{qu}(t)) \geqslant T(1, F_{qu}(t)) = F_{qu}(t) > 1-\frac{\varepsilon}{2},$$

rezultă că presupunerea noastră nu este adevărată şi deci teorema este demonstrată.

Rezultatele obţinute pînă acum conduc în mod natural la problema următoare : spaţiul claselor de echivalenţă în raport cu relaţiile de echivalenţă considerate mai sus se poate organiza ca un spaţiu metric probabilist? Are loc următoarea teoremă strîns legată de teorema 4.24, în fapt o consecinţă a acesteia.

TEOREMA 4.38. Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T continuă şi cu proprietatea (α), iar $S/\mathscr{D}$ mulţimea claselor de echivalenţă în raport cu relaţia de echivalenţă $\mathscr{D}$. În acest caz $(S/\mathscr{D}, F_{S/\mathscr{D}})$ este un spaţiu metric probabilist de tip Menger în care distanţa probabilistă între clase distincte este sigur pozitivă.

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă imediat din teorema 4.24 definind pentru orice două clase de echivalenţă

$$F_{S/\mathscr{D}}(\mathscr{D}(p), \mathscr{D}(q)) = F_{\mathscr{D}(p)\,\mathscr{D}(q)}.$$

Să demonstrăm partea a doua. Fie deci $\mathscr{D}(p)$ şi $\mathscr{D}(q)$ două clase de echivalenţă distincte şi să presupunem că $t_{\mathscr{D}(p)\,\mathscr{D}(q)} = 0$.

Cum $p \in \mathscr{D}(p)$ şi $q \in \mathscr{D}(q)$ rezultă că există $x_0 > 0$ astfel ca $F_{pq}(x_0) = 0$ iar din $t_{\mathscr{D}(p)\,\mathscr{D}(q)} = 0$, rezultă că

$$0 < F_{\mathscr{D}(p)\,\mathscr{D}(q)}(x_0) \leqslant T\left(\inf_{u\in\mathscr{D}(p)} \sup_{v\in\mathscr{D}(q)} F_{uv}(x_0), \inf_{u\in\mathscr{D}(p)} \sup_{v\in\mathscr{D}(q)} F_{uv}(x_0)\right)$$

şi deci

$$0 < \inf_{u\in\mathscr{D}(p)} \sup_{v\in\mathscr{D}(q)} F_{uv}(x_0)$$

de unde deducem că pentru orice $u \in \mathscr{D}(p)$

$$\sup_{v\in\mathscr{D}(q)} F_{uv}(x_0) > 0.$$

Prin urmare există $q_0 \in \mathscr{D}(q)$ astfel ca $F_{uq_0}(x_0) > 0$ şi cum F_{uq_0} este continuă la stînga există $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon_0 < x_0$ astfel ca

$$F_{uq_0}(x_0 - \varepsilon_0) > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$0 = F_{pq}(x_0) \geqslant T(F_{pq_0}(x_0 - \varepsilon_0),\ F_{q_0}(\varepsilon_0)) > 0$$

rezultă o contradicție și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă un rezultat privind relația de echivalență $\mathscr{D}'$.

TEOREMA 4.39. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T continuă și $S/\mathscr{D}'$ mulțimea claselor de echivalență în raport cu relația de echivalență $\mathscr{D}'$. În acest caz $(S/\mathscr{D}', F_{S/\mathscr{D}'})$ este un spațiu metric probabilist de tip Menger și distanța între două clase distincte este probabil infinită.

Demonstrație. Dacă pentru orice două clase distincte $\mathscr{D}'(p)$ și $\mathscr{D}'(q)$ punem

$$F_{S/\mathscr{D}'}(\mathscr{D}'(p),\ \mathscr{D}'(q)) = F_{\mathscr{D}'(p)\,\mathscr{D}'(q)}$$

din teorema 4,24 rezultă că avem în fapt un spațiu metric probabilist de tip Menger. Să arătăm acum că este adevărată și cealaltă afirmație.

Fie deci $D'(p)$ și $D'(q)$ două clase de echivalență distincte și să presupunem că afirmația teoremei nu este adevărată. Deci $F_{\mathscr{D}'(p)\,\mathscr{D}'(q)}(\infty) = 1$. Cum $p \in \mathscr{D}'(p)$ și $q \in \mathscr{D}'(q)$ rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $F_{pq}(\infty) < 1 - \varepsilon$ și cum T este continuă

$$1 = F_{\mathscr{D}'(p)\,\mathscr{D}'(q)}(\infty) = \lim_{x\to\infty} \sup_{t<x} T\left(\inf_{u\in\mathscr{D}'(p)} \sup_{v\in\mathscr{D}'(q)} F_{uv}(t),\ \inf_{v\in\mathscr{D}'(q)} \left(\sup_{u\in\mathscr{D}'(p)} F_{uv}(t)\right)\right) =$$

$$= \sup_{t<xu\in\mathscr{D}'(q)} T\left(\inf_{v\in\mathscr{D}'(q)} \left(\sup_{v\in\mathscr{D}'(q)} F_{uv}(t),\ \inf_{v\in\mathscr{D}'(q)} \left(\sup_{u\in\mathscr{D}'(p)} F_{uv}(t)\right)\right)\right) =$$

$$= T\left(\left(\sup_{t<xu\in\mathscr{D}'(p)} \left(\inf_{v\in\mathscr{D}'(q)} \sup_{v\in\mathscr{D}'(q)} F_{uv}(t)\right)\right),\ \sup_{t<xv\in\mathscr{D}'(q)} \left(\inf_{u\in\mathscr{D}'(p)} \sup_{u\in\mathscr{D}'(p)} F_{uv}t\right)\right).$$

Cum $T(a,b) = 1$, dacă și numai dacă $a = b = 1$, rezultă că

$$\sup_{t<xu\in\mathscr{D}'(p)} \left(\inf_{v\in\mathscr{D}'(q)} [\sup F_{uv}(t)]\right) = 1$$

și deci există $x_0 > 0$ astfel ca

$$\inf_{v\in\mathscr{D}'(q)} [\sup_{v\in\mathscr{D}'(q)} F_{uv}(x_0)] > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că

$$\sup_{v \in \mathscr{D}'(q)} F_{uv}(x_0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

și cum F_{uv} este nedescrescătoare obținem

$$\sup_{v \in \mathscr{D}'(q)} F_{uv}(\infty) \geqslant \sup_{v \in \mathscr{D}'(q)} F_{uv}(x_0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci există $q_\varepsilon \in \mathscr{D}'(q)$ astfel ca

$$F_{pq_\varepsilon}(\infty) > \sup_{v \in \mathscr{D}'(q)} F_{pv}(\infty) - \frac{\varepsilon}{4} > 1 - \frac{3\varepsilon}{4}$$

și deci

$$1 - \varepsilon > F_{pq}(\infty) \geqslant T(F_{pq_\varepsilon}(\infty), F_{qq_\varepsilon}(\infty)) = F_{pq_\varepsilon}(\infty) > 1 - \frac{3\varepsilon}{4},$$

care reprezintă o contradicție și teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă se referă la relația de echivalență C.

TEOREMA 4.40. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T, continuă și cu proprietatea (α), iar S/C mulțimea claselor de echivalență în raport cu relația de echivalență C. În acest caz $(S/C, F_{S/C})$ este un spațiu metric probabilist de tip Menger și dacă pentru orice clasă de echivalență are loc relația

$$\inf_{u,v \in C(p)} F_{uv}(0^+) > 0,$$

atunci distanța probabilistă între două clase de echivalență distincte nu este probabil zero.

Demonstrație. Prima afirmație este evidentă în virtutea teoremei 4.24; să demonstrăm pe cea de a doua. Să presupunem că afirmația nu este adevărată și fie $C(p)$, $C(q)$ două clase de echivalență distincte astfel ca

$$F_{C(p)\,C(q)}(0^+) > 0.$$

Cum $p \in C(p)$ și $q \in C(q)$ avem că

$$F_{pq}(0^+) = 0.$$

Cum avem

$$0 < F_{C(p)\,C(q)}(0^+) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sup_{t<h} T(\inf_{u \in C(p)} [\sup_{v \in C(q)} F_{uv}(t)], \inf_{v \in C(q)} [\sup_{u \in C(p)} F_{uv}(t)]) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0} T\left(\inf_{u\in C(p)}[\sup_{v\in C(q)} F_{uv}(h)], \inf_{v\in C(q)}[\sup_{u\in C(p)} F_{uv}(h)]\right) =$$

$$= T\left(\lim_{h\to 0}\inf_{u\in C(p)}[\sup_{v\in C(q)} F_{uv}(h)], \lim_{h\to 0}\inf_{v\in C(q)}[\sup_{u\in C(p)} F_{uv}(h)]\right)$$

rezultă că

$$\lim_{h\to 0+}(\inf_{u\in C(p)}[\sup_{v\in C(q)} F_{uv}(h)]) = \lambda > 0,$$

de unde

$$\lim_{h\to 0+}(\sup F_{pv}(h)) \geqslant \lambda > \frac{\lambda}{2}.$$

Cum pentru orice $h > 0$ avem

$$\sup_{v\in C(q)} F_{pv}(h) > \frac{\lambda}{2},$$

pentru orice h există $q_h \in C(q)$ astfel ca

$$F_{pq_h}(h) > \frac{\lambda}{2}.$$

Fie acum $\eta = \inf_{u,v\in C(q)} F_{uv}(0^+)$ care este strict pozitiv și deci

$$T\left(\frac{\lambda}{2}, \eta\right) > 0.$$

Cum $q_h \in C(q)$ rezultă că

$$F_{qq_h}(h) > \eta,$$

oricare ar fi $h > 0$. Cum $F_{pq}(0^+) = 0$, rezultă că există $h_0 > 0$, cu proprietatea că

$$F_{pq}(2h_0) < T\left(\frac{\lambda}{2}, \eta\right)$$

și cum

$$T\left(\frac{\lambda}{2}, \eta\right) > F_{pq}(2h_0) \geqslant T(F_{pq_{h_0}}(h_0), F_{qq_{h_0}}(h_0)) \geqslant T\left(\frac{\lambda}{2}, \eta\right),$$

am ajuns la o contradicție și teorema este demonstrată.

Observație. Ar fi interesant de studiat spațiile cît ale unui spațiu metric probabilist nearhimedean de tip Menger. Pentru unele rezultate în acest sens a se vedea [120, 121].

Scanned with OKEN Scanner

5 Generarea spaţiilor metrice probabiliste

Origina acestor clase de spaţii se găseşte în lucrarea lui A. Špaček [14] în care a fost introdusă noţiunea de metrică aleatoare şi care constă dintr-o mulţime S, împreună cu o măsură μ definită pe mulţimea aplicaţiilor produsului cartezian $S \times S$ în R_+ astfel încît $\mu(M) = 1$, unde M este mulţimea tuturor aplicaţiilor care sînt metrici.

Scopul nostru este de a expune rezultatele principale privind spaţiile metrice generate cît şi unele extensii ale lor.

5.1. Spaţii cvasi-metrice probabiliste şi cvasi-metrice generate

În cele ce urmează vom introduce o clasă de spaţii probabiliste care generalizează unele din clasele considerate de R. Stevens [64] şi H. Sherwood [70].

Fie S o mulţime arbitrară şi $\mathscr{D}$ colecţia cvasi-metricilor pentru S şi μ o măsură pentru $\mathscr{D}$ astfel ca următoarele condiţii să fie îndeplinite:

(α) oricare ar fi p, $q \in S$ şi x real atunci

$$\{d,\ d(p, q) < x\}$$

este o mulţime μ-măsurabilă;

(β) $\mu(\mathscr{D}) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Din condiția (α) rezultă că pentru orice p și q în S funcția

$$d \to d(p, q)$$

este o variabilă aleatoare care are ca funcție de repartiție funcția F_{pq} definită prin

$$F_{pq}(x) = \mu(d \in \mathscr{D}, d(p, q) < x).$$

Cum avem proprietățile:

1) $F_{pq}(x) = 1 \quad \forall x > 0$ dacă și numai dacă $p = q$,

2) $F_{pq}(0) = 0$,

3) $F_{pq}(x) = 1$ și $F_{qr}(y) = 0 \Rightarrow F_{pr}(x + y) = 1$,

rezultă că are loc următoarea:

TEOREMA 5.1. (S, F) cu $F((p, q)) = F_{pq}$ este un spațiu cvasi-metric probabilist.

Rezultatul obținut permite să introducem o clasă de spații care conține ca un caz particular pe cele considerate de *R.* Stevens.

DEFINIȚIA 5.2. Un spațiu cvasi-metric probabilist (S, F) se spune cvasi-metric generat dacă și numai dacă există $\mathscr{D}$ și μ astfel ca:

1° S, $\mathscr{D}$, μ are proprietățile (α) și (β),

2° $F_{pq}(x) = \mu(d \in \mathscr{D},\ d(p, q) < x)\ \forall\ p, q \in S$ și $x \in R$.

Are loc:

TEOREMA 5.3. Dacă (S, F) este un spațiu cvasi-metric probabilist care este cvasi-metric generat, atunci este de tip Menger în raport cu t-norma T dată de

$$T(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\}.$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că are loc inegalitatea lui Menger. Fie deci p q, r în S și x, $y \geqslant 0$. Să punem

$$E_1 = \{d,\ d(p, q) < x\},$$
$$E_2 = \{d,\ d(q, r) < y\},$$
$$E_3 = \{d,\ d(p, r) < x + y\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum avem $d(p, r) \leqslant d(p, q) + d(q, r)$ oricare ar fi $d \in \mathscr{D}$ obţinem că $E_1 \cap E_2 \subset E_3$ şi deci

$$F_{pr}(x+y) = \mu(E_3) \geqslant \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cup E_2) =$$
$$= F_{pq}(x) + F_{qr}(y) - \mu(E_1 \cup E_2) \geqslant F_{pq}(x) + F_{qr}(y) - 1$$

şi teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă dă un rezultat privind funcţiile de repartiţie F_{pq} ale unui spaţiu cvasi-metric probabilist ca în teorema 5.3.

TEOREMA 5.4. Fie $(S, \mathscr{F})$ ca în teorema 5.3. În acest caz F_{pq} este continuă în $x = 0$ dacă $p \neq q$.

Demonstraţie. Fie $x_n \to 0$ şi $\{E_n\}$ şirul de mulţimi definit prin

$$E_n = \{d,\ d(p, q) < x_n\}.$$

Putem presupune fără a restrînge generalitatea că $\{x_n\}$ este un şir descrescător. În acest caz cum $\lim E_n = \emptyset$ şi $\mu(E_1) < \infty$, μ fiind o măsură

$$\lim F_{pq}(x_n) = \lim \mu(E_n) = \mu(\emptyset) = 0 = F_{pq}(0)$$

şi teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă arată că rezultatul obţinut în teorema 5.3 pentru cazul cînd spaţiul este un spaţiu metric probabilist adică cvasi-metricele sînt metrice, este cel mai bun posibil.

TEOREMA 5.5. Dacă T este o t-normă mai tare decît $T(a, b) = \max\{a+b-1, 0\}$, atunci există un spaţiu metric probabilist metric generat (S, F) care nu este un spaţiu metric probabilist de tip Menger pentru t-norma T.

Demonstraţie. Vom nota t-norma $T(a, b) = \max\{a+b-1, 0\}$ prin T_m şi să presupunem T o t-normă mai tare decît T_m. Deci există a, b în (0,1) astfel ca

$$T(a, b) > T_m(a, b).$$

Vom avea de considerat două cazuri:
Cazul cînd $a+b \leqslant 1$. Să luăm

$$S = (p, q, r),\ \mathscr{D} = \{dt\}_{t \in [0,1]}$$

cu

$$dt(p,q) = t+3,\ dt(q,r) = t+5,\ dt(p,r) = t+8,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},$$

$$dt(p,q) = t+5,\ dt(q,r) = t+3,\ dt(p,r) = t+8,\ \frac{1}{2} < t \leqslant 1.$$

Să luăm $g : [0,1] \to R$ definită prin

$$g(t) = \begin{cases} 8at, & 0 < t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 8(1-a)\left(t - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$$

şi măsura μ definită prin

$$\mu(\mathscr{D}) = \int g(t)\,dt,$$

unde integrala este luată în sensul integralei Lebesgue în raport cu măsura dt, adică pe mulţimea

$$\{t,\ dt \in \mathscr{D}\}$$

care este măsurabilă Lebesgue. În acest caz funcţiile F_{pq}, F_{qr}, F_{pr} sînt chiar continue şi

$$F_{pr}(4+4) = 0 = T_m(a,b) < T(a,b) \leqslant T(1,\ 1-a) = T(F_{pq}(4),\ F_{qr}(4))$$

şi deci $(S,\ F)$ nu este un spaţiu metric probabilist de tip Menger.

Cazul cînd $a+b>1$. Să luăm

$$S = (p,\ q,\ r),\ \mathscr{D} = \{dt\}_{0<t<1},$$

$$dt(p,q) = t+1,\ dt(q,r) = t+5,\ dt(p,r) = t+6,\ 0 < t \leqslant \frac{1}{3}$$

$$dt(p,q) = t+2,\ dt(q,r) = t+2,\ dt(p,r) = t+4,\ \frac{1}{3} < t \leqslant \frac{2}{3}$$

$$dt(p,q) = t+5,\ dt(q,r) = t+1,\ dt(p,r) = t+6,\ \frac{2}{3} < t \leqslant 1$$

Scanned with OKEN Scanner

și să considerăm funcția $g: [0,1) \to R$ definită prin

$$g(t) = \begin{cases} 18(1-b)t, & 0 < t \leqslant \frac{1}{3}, \\ 18(a+b-1)\left(t-\frac{1}{3}\right), & \frac{1}{3} < t \leqslant \frac{2}{3}, \\ 18(1-a)\left(t-\frac{2}{3}\right), & \frac{2}{3} < t < 1. \end{cases}$$

Să considerăm măsura μ definită prin

$$\mu(\mathscr{D}) = \int g(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde integrala este în sens Lebesgue pe mulțimea $E = \{t,\ dt \in D\}$

Funcțiile de repartiție F_{pq}, F_{qr}, F_{pr} sînt de asemenea continue și avem relația

$$F_{pr}(3+3) = a+b-1 = T_m(a, b) < T(a, b) = T(F_{pq}(3), F_{qr}(3)),$$

care arată că (S, F) nu este un spațiu de tip Menger. Teorema este astfel demonstrată.

Ca o consecință a teoremei privind metrizabilitatea spațiilor metrice probabiliste avem:

TEOREMA 5.6. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist metric generat, atunci (ε, λ)-topologia sa este metrizabilă.

Următoarea teoremă dă un rezultat mai precis, decît teorema 5.6, dar în condiții mai speciale.

TEOREMA 5.7. Dacă pentru orice $p, q \in S$ variabila aleatoare

$$d \to d(p, q)$$

are momentul de ordin k finit, atunci

$$(p, q) \to \delta_k(p, q) = \begin{cases} \int_{\mathscr{D}} d^k(p, q)\,\mathrm{d}\mu, & 0 < k \leqslant 1, \\ \left(\int_{\mathscr{D}} d^k(p, q)\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/k}, & k > 1 \end{cases}$$

este o metrică pe S.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Evidentă.

Vom da acum cîteva rezultate privind spații nearhimedeene. Fie S o mulțime arbitrară și $\mathscr{D}$ familia tuturor ultrametricilor pe mulțimea S, adică a funcțiilor $\rho : S \times S \to R$ cu proprietățile:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3) $\rho(x, y) < \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$

și μ o măsură pe $\mathscr{D}$ cu proprietățile:

(α') oricare ar fi p, q

$$\{\rho,\ \rho(p, q) < x\}$$

este μ-măsurabilă

(β') $$\mu(\mathscr{D}) = 1.$$

Este ușor de văzut că dacă punem

$$F_{pq}(x) = \mu(\rho,\ \rho(p, q) < x\}$$

(S, F) este un spațiu metric probabilist nearhimedeean. Aceasta permite ca și mai înainte să introducem o clasă de spații metrice probabiliste nearhimedeene prin:

DEFINIȚIA 5.8. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist nearhimedeean atunci se spune că este ultrametric generat dacă și numai dacă există $\mathscr{D}$ cu proprietățile de mai sus astfel ca S, $\mathscr{D}$, μ au proprietățile (α'), (β') și

$$F(p, q)(x) = F_{pq}(x) = \mu(\rho, \rho(p, q) < x).$$

Are loc următoarea:

TEOREMA 5.9. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist nearhimedeean ultrametric generat atunci (S, F) este de tip Menger.

Demonstrație. Trebuie să arătăm numai că oricare ar fi $p, q, r \in S$ și $x, y \geqslant 0$, avem

$$F_{pr}(\max(x, y)) \geqslant T_m(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$$

Scanned with OKEN Scanner

celelalte afirmații fiind evidente. În adevăr, fie E_1, E_2, E_3 mulțimi definite prin

$$E_1 = \{\rho,\ \rho(p, q) < x\};\quad E_2 = \{\rho,\ \rho(q, r) < y\};$$
$$E_3 = \{\rho,\ \rho(p,r) \leqslant \max(x,\ y)\}.$$

Cum $\rho(p,\ r) \leqslant \max\{\rho(p, q),\ \rho(q, r)\}$ deducem că

$$E_1 \cap E_2 \leqslant E_3$$

deoarece

$$\rho(p,\ r) \leqslant \max\{\rho(p, q),\ \rho(q, r)\} \leqslant \max\{x, y\}.$$

Cum avem

$$F_{pr}(\max(x, y)) = \mu(E_3) \geqslant \mu(E_1 \cap E_2) \geqslant \mu(E_1) + \mu(E_2) -$$
$$- \mu(E_1 \cup E_2) \geqslant F_{pr}(x) + F_{qr}(y) - 1,$$

teorema este demonstrată.

Exact ca teorema 5.4 se demonstrează:

TEOREMA 5.10. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist nearhimedeean care este ultrametric generat atunci F_{pq} este o funcție continuă în $x = 0$ dacă $p \neq q$.

Vom da acum un rezultat privind topologia unei clase de spații metrice probabiliste.

TEOREMA 5.11. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist care este metric generat și pentru orice $p, q \in S$ variabila aleatoare

$$d \to d(p,\ q)$$

are momentul de ordin k finit, atunci (ε, λ)-topologia spațiului este mai slabă decît topologia dată de metrica δ_k.

Demonstrație. Topologia (ε, λ) are ca bază familia de mulțimi

$$N_p(\varepsilon, \lambda) = \{q,\ F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}_{\varepsilon,\ \lambda > 0}$$

și pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că orice astfel de mulțime conține o sferă deschisă de forma

$$S_p(r) = \{q,\ \delta_k(p,\ q) < r\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm că are loc relaţia

$$S_p(\varepsilon^k \lambda) \subset N_p(\varepsilon, \lambda) \tag{5.11.1}$$

dacă $0 < k \leqslant 1$ ori

$$S_p(\varepsilon \lambda^{1/k}) \subset N_p(\varepsilon, \lambda) \tag{5.11.2}$$

dacă $1 < k$.

Să presupunem $0 < k \leqslant 1$ şi că prima relaţie (5.11.1) nu are loc. În acest caz există ε, λ, p, şi q în S astfel ca

$$\delta_k(p, q) < \varepsilon^k \lambda \text{ şi } F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda.$$

Fie $E = \{d,\ d(p, q) \geqslant \varepsilon\}$ şi deci $\mu(E) \geqslant \lambda$ de unde

$$\delta_k(p, q) \geqslant \int_E d^k(p, q)\, d\mu \geqslant \int_E \varepsilon^k\, d\mu = \varepsilon^k \mu(E) \geqslant \varepsilon^k \lambda$$

care este o contradicţie.

Să presupunem acum că $1 < k$ şi că relaţia (5.11.2) nu are loc. În acest caz există ε, λ, p şi q în S astfel ca

$$\delta_k(p, q) < \varepsilon \lambda^{1/k} \text{ şi } F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda.$$

Să punem

$E = \{d,\ d(p, q) \geqslant \varepsilon\}$ şi deci $\mu(E) > \lambda$ de unde

$$\delta_k(p, q) \geqslant \left[\int_E d^k(p, q)\, d\mu\right]^{1/k} \geqslant \left[\int_E \varepsilon^k\, d\mu\right]^{1/k} \geqslant \varepsilon \lambda^{1/k},$$

care reprezintă o contradicţie şi teorema este demonstrată.

Vom remarca faptul că această teoremă este adevărată şi pentru cazul cînd avem spaţii metrice probabiliste nearhimedeene ultrametric generate, demonstraţia fiind aceeaşi.

O altă clasă de spaţii metrice probabiliste sînt cele introduse de H. Sherwood sub denumirea de E-spaţii.

Definiţia 5.12. Un spaţiu metric probabilist (S, F) este un E-spaţiu pe spaţiul metric (M, d) dacă elementele lui S sînt funcţii definite pe un spaţiu probabilizat $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ cu valori în M şi astfel ca oricare ar fi $p, q \in S$ şi x real

$$\{t,\ d(p(t), q(t)) < x\}$$

Scanned with OKEN Scanner

este P-măsurabilă și

$$F(p,q) = F_{pq} \text{ cu } F_{pq}(x) = P\{t,\ d(p(t),\ q(t)) < x\}$$

două funcții sînt considerate identice dacă diferă pe o mulțime de măsură P nulă).

Următorul exemplu, mai complicat, arată legătura între spațiile metrice probabiliste și unele spații funcționale importante.

Fie $C_0(0,\ \pi)$ spațiul Banach al funcțiilor continue pe segmentul $[0,\ \pi]$ care au proprietatea că $f(0) = 0\ \forall\ f \in C_0(0,\ \pi)$. Să notăm cu dw măsura Wiener, provenită din măsura Wiener a spațiului $\hat{C}(0,\pi)$ al funcțiilor continue pe $[0,\ \pi]$ și care sînt ortogonale funcției 1.

Pentru orice $t,\ s \in [0,\ \pi]$ să punem

$$F_{ts}(x) = dw(f,\ |(f(t) - f(s)| < x,\ f \in C_0(0,\ \pi))$$

și în acest mod

$$([0,\ \pi], F)$$

(este un spațiu metric probabilist de tipul introdus mai sus.

Vom remarca și faptul că acest exemplu de E-spațiu sugerează o legătură între spațiile metrice probabiliste și procesele stochastice.

Putem introduce de asemenea și o clasă de E-spații nearhimedeene.

DEFINIȚIA 5.13. Un E-spațiu se spune nearhimedeean dacă spațiul metric $(M,\ d)$ este un spațiu ultrametric.

Are loc:

TEOREMA 5.14. Dacă (S,F) este un E-spațiu atunci au loc următoarele afirmații:

1) (S,F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T_m.

2) (S,F) este un spațiu metric probabilist nearhimedeean dacă (M,d) este un spațiu ultrametric, în raport cu t-norma T_m.

2) (S,F) este un spațiu metric probabilist nearhimedeean dacă (M,d) este un spațiu ultrametric, în raport cu t-norma T_m.

Demonstrație. Demonstrația acestei teoreme se face ca în cazul teoremelor 5.3 și 5.9 și de aceea o omitem.

Scanned with OKEN Scanner

Apare în mod natural problema legăturii dintre clasa spaţiilor metrice probabiliste metric generate şi cele introduse în definiţia 5.12. Pentru a formula un rezultat în acest sens avem nevoie de următoarea noţiune pe care o introducem în:

DEFINIŢIA 5.15. Două spaţii metrice probabiliste (S_1,F_1) şi $S_2,F_2)$ se spun izometrice dacă există o corespondenţă biunivocă $f: S_1 \to S_2$ cu proprietatea că

$$F_2(f(p),\ f(q)) = F_1(p,q)$$

oricare ar fi $p,\ q \in S_1$.

Are loc:

TEOREMA 5.16. Orice spaţiu metric probabilist metric generat este izometric cu un E-spaţiu.

Demonstraţie. Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist care este metric generat şi deci

$$F_{pq}(x) = \mu(d \in \mathcal{D},\ d(p,q) < x)$$

oricare ar fi $p,q \in S$ şi $x \in R$. Să punem $\Omega = \mathcal{D}$, $K = \mathcal{B}$ şi $P = \mu$, $\mathcal{B}$ fiind corpul pe care este definită măsura μ.

Să punem $M = S \times \mathcal{D}$ şi fie $p_0 \in S$ fixat. Să definim $\delta : M \times M \to R_+$ prin

$$\delta((p,d_1),\ (q,d_2)) = \begin{cases} d_1(p,p_0) + d_2(q,p_0) + 1, & d_1 \neq d_2, \\ d_1(p,q), & d_1 = d_2, \end{cases}$$

care este o metrică pe M.

Să definim

$$\pi_p : \mathcal{D} \to M$$

prin relaţia

$$\pi_p(d) = (p,d)$$

şi fie $S' = \{\pi_p\}_{p \in S}$. Cum

$$\{d,\ d \in \mathcal{D}, \delta(\pi_p(d),\pi_q(d)) < x\} = \{d,\ d \in \mathcal{D},\ \delta((p,d),\ (q,d)) < x\} = \{d, d \in \mathcal{D},\ d(p,q) < x\}$$

rezultă că mulţimea $\{d, \delta(\pi_p, \pi_q) < x\}$ este μ-măsurabilă şi să definim $F'(\pi_p,\pi_q) = F'_{\pi_p\,\pi_q}$ unde

$$F'_{\pi_p\,\pi_q}(x) = \mu\{d,\ \delta(\pi_p(d),\ \pi_q(d)) < x\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest mod (S', F') este un spațiu metric probabilist de tip E-spațiu. Pentru a demonstra teorema este necesar să mai arătăm că cele două spații sînt izometrice. Este ușor de văzut că

$$f: p \to \pi_p$$

este o corespondență biunivocă și cum

$$F_{\pi_p \pi_q}(x) = \mu\{d,\ d \in \mathscr{D},\ d(p,q) < x\} = F_{pq}(x)$$

teorema este demonstrată.

Apare în mod natural problema, în virtutea rezultatului obținut în teoremă, dacă afirmația se păstrează pentru spații nearhimedeene. Are loc:

TEOREMA 5.17. Orice spațiu probabilist nearhimedeean ultrametric generat este izometric cu un E-spațiu nearhimedeean.

Demonstrație. Vom pune ca și mai sus $M = S \times \mathscr{D}$ și să introducem următoarea funcție: fie $p_0 \in S$ arbitrar dar fix și

$$\delta((p,d_1),(q,d_2)) = \begin{cases} \max\{d_1(p,p_0), d_2(q,p_0)\}, & d_1 \neq d_2, \\ d_1(p,q), & d_1 = d_2. \end{cases}$$

Se verifică imediat faptul că δ este o ultrametrică și se poate astfel considera spațiul S' și aplicația F', demonstrația teoremei făcîndu-se exact ca mai sus.

O clasă de spații strîns legată de clasa spațiilor metric generate este și următoarea, dată în:

DEFINIȚIA 5.18. Un spațiu metric probabilist (S,F) se spune că este pseudo-metric generat dacă

1) $\mathscr{D}$ este familia pseudo-metricilor mulțimii S,
2) pentru orice $p,q \in S$, $x \in R$

$$\{d,\ d \in \mathscr{D},\ d(p,q) < x\}$$

este măsurabilă în raport cu măsura μ cu proprietatea $\mu(\mathscr{D}) = 1$.

3) $F(p,q)\ (x) = F_{pq}(x) = \mu(d, d(p,q) < x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\mathscr{D}$ este familia pseudo-metricilor mulțimii S vom spune că spațiul metric nearhimedecan este pseudo-ultrametric generat.

Următoarele teoreme arată structura spațiilor izometrice cu E-spații.

TEOREMA 5.19. Orice spațiu metric probabilist izometric cu un E-spațiu este un spațiu metric probabilist pseudo-metric generat.

Demonstrație. Fie (S,F) un E-spațiu; deci există (M,d) un spațiu metric și un spațiu probabilizat $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ astfel că elementele lui S sînt funcții definite pe Ω cu valori în M și astfel ca

$$F_{pq}(x) = P(t, d(p(t), q(t)) < x).$$

Pentru orice $t \in \Omega$ să punem

$$dt(p,q) = \delta(p(t), q(t)),$$

care este o pseudo-metrică și fie $\mathscr{D} = \{dt, t \in \Omega\}$, iar $\mathscr{B}$ familia mulțimilor b definite prin

$$b = \{dt, t \in A\}$$

cu $A \in K$ adică $b = f^{-1}(A)$ unde $f: \mathscr{A} \to \mathscr{D}$ este definită prin relația

$$f(t) = dt.$$

Măsura μ o definim în mod standard

$$\mu(b) = P(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

și în acest mod $(\mathscr{D}, \mathscr{B}, \mu)$ este un spațiu probabilizat. Atunci

$$F_{pq}(x) = P(t, t \in \mathscr{A}, \delta(p(t), q(t)) < x) = P(t, t \in \Omega, dt(p,q) < x) =$$
$$= \mu(dt, dt(p,q) < x)$$

și deci (S,F) este un spațiu pseudo-metric generat.

Avem acum de considerat cazul cînd (S,F) este izometric cu un E-spațiu (S',F') și fie $\pi : S \to S'$ care ne dă izometria celor două spații.

Scanned with OKEN Scanner

Conform celor demonstrate mai sus (S',F') este un spaţiu pseudo-metric generat şi fie d' pseudo-metrica definită pe S' şi să punem

$$d(p,q) = d'(\pi(p), \pi(q)).$$

În acest caz

$$F_{pq}(x) = F'_{\pi(p)\,\pi(q)}(x) = \mu'(d't,\ d't(\pi(p), \pi(q)) < x) =$$
$$= \mu(dt,\ dt(p,q) < x)$$

şi teorema este astfel demonstrată.

Exact în acelaşi mod se poate demonstra şi:

TEOREMA 5.20. Orice spaţiu metric probabilist care este un E-spaţiu nearhimedeean este pseudo-ultrametric generat.

Din teoremele obţinute se obţine următoarea caracterizare:

TEOREMA 5.21. Un spaţiu metric probabilist este:

1) un spaţiu pseudo-metric generat dacă şi numai dacă este izometric cu un E-spaţiu;

2) un spaţiu pseudo-ultrametric generat este atunci şi numai atunci cînd este un E-spaţiu nearhimedeean.

Următoarea teoremă se referă la o clasă specială de spaţii metrice probabiliste dînd o condiţie necesară şi suficientă pentru a fi metric generat.

TEOREMA 5.22. Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist simplu generat de spaţiul metric (S,d) şi de funcţia de repartiţie $G(F_{pq}(x) = G(x/d(p,q)))$. În acest caz (S,F) este metric generat dacă şi numai dacă G este continuă în $x = 0$.

Demonstraţie. Faptul că condiţia pusă asupra lui G este necesară rezultă din teorema 5.4. Să arătăm că este şi suficientă. Să luăm $\mathscr{D} = \{dy,\ y > 0\}$ unde dy sînt definite prin

$$dy(p,q) = y\,d(p,q)\ \ p,q \in S \text{ şi } y > 0.$$

Funcţia $y \to dy$ este crescătoare pe R_+. Fie σ măsura Lebesgue-Stieljes generată de această funcţie şi să punem

$$\mu(D) = \sigma(y > 0,\ dy \in \mathscr{D})$$

Scanned with OKEN Scanner

oricare ar fi mulțimea măsurabilă $\mathscr{D}$. În acest caz $(S, \mathscr{D}, \mu)$ satisface condițiile cerute de teoremă deoarece

$$F_{pq}(x) = G(x/\mathrm{d}(p,q) = \sigma\left((y>0, y<\frac{x}{\mathrm{d}(p,q)}\right) =$$

$$= \sigma(y>0,\ y\mathrm{d}(p,q)<x) = \mu(\mathrm{d}y \in \mathscr{D},\ \mathrm{d}y(p,q)<x).$$

Teorema este astfel demonstrată.

Este evident că teorema este adevărată și pentru cazul spațiilor metrice probabiliste nearhimedeene. Necesitatea rezultă din teorema 5.10 și suficiența se demonstrează ca în teorema 5.22.

Vom da acum condiții necesare și suficiente pentru ca anumite clase de spații metrice probabiliste să fie metric generate. Vom avea nevoie de o noțiune introdusă de A. Sklar privind funcțiile de repartiție.

DEFINIȚIA 5.23. Dacă F este o funcție de repartiție, funcția F^* definită prin

$$F^*(t) = \sup\{x, F(x) < t\}$$

este numită funcție cvasi-inversă funcției F.

Să luăm (S,F) un spațiu metric probabilist și să introducem următoarele condiții:

(C) pentru orice $t \in (0,1)$ funcția $\mathrm{d}t : S \times S \to R_+$

$$\mathrm{d}t(p,q) = F^*_{pq}(t)$$

este o metrică,

(D) (S,F) este metric generat cu $(S, \mathscr{D}, \mu)$ și $\mathscr{D}$ este liniar ordonată cu relația de ordine

$$d_1 \leqslant d_2 \Leftrightarrow d_1(p,q) \leqslant d_2(p,q)\ \forall\ p,q \in S.$$

(E) (S,F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma Min (dată prin $T(a,b) = \min((a,b))$.

Are loc:

TEOREMA 5.24. Dacă (S,F) este un spațiu metric probabilist atunci

$$(C) \Rightarrow (D) \Rightarrow (E).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie (C) îndeplinită și să punem $\mathscr{D} = \{dt,\ 0 < t < 1\}$ iar măsura ν definită prin

$$\mu(D) = \nu\ (0 < t < 1,\ dt \in D)$$

unde ν este măsura Lebesgue pe (0,1), $\mathscr{D} = \{t, t \in (0,1), dt \in \mathscr{D}\}$ este măsurabilă. Este evident că (S,F) este metric generat cu $(S,\mathscr{D}, \mu)$, iar $\mathscr{D}$ este liniar ordonată deoarece F^* este nedescrescătoare pe $[0,1)$. Deci (D) este adevărată.

Să presupunem acum că (D) este adevărată și fie p, q, r în S $x,\ y \geqslant 0$ iar

$$E_1 = \{d, d(p,q) < x\},$$
$$E_2 = \{d, d(q,r) < y\},$$
$$E_3 = \{d, d(p,r) < x + y\}.$$

Să arătăm că avem $E_1 \leqslant E_2$ sau $E_2 \subseteq E_1$. În adevăr, să presupunem că $E' \nleqslant E_2$ și fie $d_1 \in E_1 - E_2$. Cum $\mathscr{D}$ este liniar ordonată obținem că :

α) pentru toți $d \leqslant d_1$, $d \in E_1$,

β) $d_1(q,r) \geqslant y$,

γ) pentru orice $d \in E_2$, $d(q,r) < y < d_1(q, r)$ și $d \leqslant d_1$.

Din (α) și (γ) rezultă că $E_2 \subseteq E_1$ deoarece sau $E_1 \subseteq E_2$ sau $E_2 \subseteq E_1$. Cum însă $E_1 \cap E_2 \subset E_3$,

$$F_{pr}(x + y) = \mu(E_3) \geqslant \mu(E_1 \cap E_2) = \min\{\mu(E_1), \mu(E_2)\} =$$
$$= \mathrm{Min}(F_{pq}(x), F_{qr}\ (y))$$

și deci (S,F) este un spațiu de tip Menger adică (E) este adevărată. teorema este astfel demonstrată.

Teorema 5.25. Dacă (S,F) este un spațiu metric probabilist astfel ca oricare ar fi p, q S, $p \neq q$, F_{pq} este continuă în zero atunci (C), (D) și (E) sînt echivalente.

Demonstrație. Din teorema 5.24 rezultă că este suficient să arătăm că (E) $\Rightarrow$ (C).

Scanned with OKEN Scanner

Fie deci (E) adevărată și $0 < t < 1$ iar, $d_t(p,q) = F^*_{pq}(t)$. Să arătăm că funcțiile d_t sînt metrici pentru S. Este evident că au loc proprietățile:

1° $d_t(p,q) \geqslant 0$ și $d_t(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$,

2° $d_t(p,q) = d_t(q,p)$.

Să arătăm că are loc și inegalitatea triunghiului. În adevăr, dacă p, q, r sînt puncte distincte în S, iar F_{pq}, F_{qr} sînt continue în zero, rezultă că există $x,y \geqslant 0$ astfel ca

$$t = F_{pq}(x) = F_{qr}(y),$$

$$x = F^*_{pq}(t),\ y = F^*_{qr}(t).$$

Cum (S,F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma Min, rezultă că

$$F_{pr}(F^*_{pq}(t) + F^*_{qr}(t)) = F_{pr}(x + y)\ \text{Min}\,(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) =$$

$$= \text{Min}\ (t,t) = t.$$

De aici rezultă că

$$F^*_{pq}(t) + F^*_{qr}(t) \geqslant F^*_{pr}(t),$$

adică are loc inegalitatea triunghiului

3° $$d_t(p,r)\ d_t(p,q) + d_t(q,r),$$

teorema este astfel demonstrată.

Din această teoremă rezultă imediat o teoremă importantă privind clasa spațiilor metrice probabiliste metric generate.

teorema 5.26. Dacă (S,F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma Min, și dacă oricare ar fi p,q S, $p \neq q$, F_{pq} este continuă în zero, atunci (S,F) este metric generat.

Vom remarca faptul că se pune o problemă analogă dacă se consideră spații nearhimedeene: teorema 5.26 este adevărată dacă (S,F) este nearhimedeean? În acest sens a se vedea [120].

Vom remarca de asemenea că, $T = \text{Min}$ fiind cea mai tare t-normă ar părea posibil ca teorema 5.26 să poată fi extinsă și la alte clase de spații. Teorema următoare arată că rezultatul obținut în teorema 5.26 este într-un anumit sens cel mai bun.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 5.27. Fie T o t-normă continuă care este mai slabă decît $T = \text{Min}$. Atunci există un spaţiu metric probabilist (S,F) astfel ca :

(1) (S,F) este de tip Menger în raport cu t-norma T,

(2) oricare ar fi $p \neq q$, F_{pq} este continuă în zero,

(3) (S,F) nu este metric generat.

Demonstraţie. Prin ipoteză există $a \in (0,1)$ astfel ca $T(a,a) < a$ şi să considerăm spaţiul metric probabilist definit astfel :

(α) $S = \{p,q,r\}$, p, q, r fiind elemente arbitrare dar distincte între ele,

(β) funcţiile de repartiţie $F(p,q) = F_{pq}$, $F(q,r) = F_{qr}$, $F(p,r) = F_{pr}$ definite prin

$$F_{pq}(x) = F_{qr}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ a(4x-1), & \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ a, & \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{4}, \\ (1-a)(4x-3)+a, & \frac{3}{4} < x \leqslant 1, \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

şi

$$F_{pr}(x) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} T(F_{pq}(x-t), F_{qr}(t))$$

oricare ar fi $x \geqslant 0$.

Este uşor de văzut că (S,F) este un spaţiu metric probabilist, iar funcţiile de repartiţie sînt continue în zero.

De asemenea avem relaţiile

$$F_{pr}(1) = T(a,a), \quad F_{pr}(1,5) = T(1,a) = a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că (S,F) este metric generat și deci există $\mathscr{D}$ și μ cu proprietățile cunoscute. În acest caz avem și următoarea relație

$$1-a=1-F_{pr}(1{,}5)=1-\mu(d(p,r)<1{,}5)=\mu(d,d(p,r)\geqslant$$
$$\geqslant 1{,}5)\leqslant\mu(d,d(p,r)\geqslant 1{,}5 \text{ și } d(p,q)<0{,}5 \text{ și } d(q,r)<5+$$
$$+\mu(d,d(p,r)\geqslant 1{,}5).$$

deoarece mulțimile din membrul drept constituie o acoperire a mulțimii

$$\{d,\ d(p,r>1{,}5\}.$$

Din inegalitatea triunghiului rezultă imediat că primii trei termeni din suma din dreapta sînt zero. Al cincelea termen este de asemenea zero deoarece $F_{pq}(1)=F_{qr}(1)=1$. În acest mod avem

$$1-a\leqslant\mu(d,\ d(p,r)\geqslant 1{,}5 \text{ și } 0{,}5\leqslant d(p,q)<1 \text{ și } 0{,}5<d(q,r)<1\leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

6 Geometria spaţiilor metrice probabiliste

Conceptul de spaţiu metric împrumută elemente din geometria axiomatică cît şi din geometria analitică. Din geometria axiomatică este furnizată o clasă de elemente numite puncte, iar geometria analitică furnizează noţiunea de distanţă între două puncte care satisface axiomele binecunoscute.

În [5,7], *K.* Menger a dezvoltat o teorie în cadrul spaţiilor metrice generalizînd conceptele cunoscute din geometrie.Rezultate extinzînd pe cele obţinute de Menger au mai fost obţinute de L. Blumenthal, Cristian Pauc, Abraham Wald, G. Alexits, W. A. Wilson, Alt şi Haupt, K. Gödel.

În cele ce urmează, vom expune pe scurt unele noţiuni în cadrul spaţiilor metrice şi apoi în cadrul spaţiilor metrice probabiliste dînd mai detaliat o teorie în cadrul spaţiilor Wald.

6.1. "Convexitate" şi relaţia "între" în spaţii metrice

Fie (X,d) un spaţiu metric şi p, r două puncte în X.

DEFINIŢIA 6.1. Punctul $q \in X$ se spune că este „între" punctele p şi r dacă:

1) $p \neq q \neq r$,

2) $d(p,r) = d(p,q) + d(q,r)$.

Se poate arăta uşor că au loc următoarele proprietăţi pe care le dăm sub formă de:

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 6.2. Următoarele afirmaţii sînt adevărate:

1° Dacă q este „între" p şi r atunci q este „între" r şi p.

2° Dacă q este „între" p şi r atunci r nu este „între" p şi q,

3° Dacă q este „între" p şi r şi r este „între" p şi s atunci q este „între" p şi s şi r este „între" q şi s,

4° Dacă $p \neq q \neq r$ şi q este limita unui şir de puncte „între" p şi r atunci q este „între" p şi r.

DEFINIŢIA 6.3. Un spaţiu metric (X,d) este „convex" dacă pentru orice două puncte distincte p şi r există cel puţin un punct q care este „între" p şi r.

Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet care este convex, atunci oricare ar fi p şi q puncte distincte în X, segmentul care uneşte punctul p cu q, adică mulţimea punctelor „între" p şi q, este izometric cu un segment de pe dreapta reală.

DEFINIŢIA 6.4. O mulţime $A \subset (X,d)$ se spune că este exterior convexă dacă oricare ar fi p şi q în A există un punct r astfel ca r să fie „între" p şi q.

DEFINIŢIA 6.5. Prin curbă într-un spaţiu metric (X,d) vom înţelege imaginea topologică a unui interval. Dacă intervalul I este dreapta reală, iar funcţia care intervine în definiţie este o izometrie, vom spune că avem în spaţiu o dreaptă.

În cadrul spaţiilor metrice o atenţie deosebită a fost acordată noţiunilor care să extindă pe cele cunoscute din teoria curbelor şi suprafeţelor. Astfel, eforturi deosebite au fost depuse pentru a defini noţiunea de curbură şi de torsiune în spaţii metrice. Vom menţiona aici că în afară de K. Menger contribuţii deosebit de interesante au fost aduse de către Alt, Wald, Gödel, Alexits, Schoenberg, Blumenthal etc.

6.2. Relaţia „între" în spaţii metrice probabiliste

Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma T. Vom defini acum conceptul de „între" în spaţii de acest tip şi vom arăta legătura sa cu conceptul de „între" din teoria spaţiilor metrice. Fie pentru aceasta funcţia H definită, după cum este cunoscut prin

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și funcția $j : R \to R$ definită prin $j(x) = x$.

DEFINIȚIA 6.6. Punctul q se spune că este „între" p și r, $p, q, r \in S$ dacă

$$1 - F_{pr}(x + y) \geqslant T(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y))$$

oricare ar fi $x, y \geqslant 0$.

Dacă q este „între" p și r în sensul acestei definiții vom scrie p-q-r.

Următoarea teoremă arată consistența definiției 6.6 cu definiția conceptului de „între" în spații metrice.

TEOREMA 6.7. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist simplu generat de spațiul metric (S,d) și (S,F) de tip Menger în raport cu t-norma T Min. În acest caz q este „între" p și r în spațiul metric (S,d) dacă și numai dacă p-q-r.

Demonstrație. Să presupunem $p, q, r \in S$ și

$$d(p, r) = d(p, q) + d(q, r).$$

Dacă $d(p, q) \leqslant x$, $d(q, r) \leqslant y$ atunci

$$1 - F_{pr}(x + y) \geqslant 0 = \operatorname{Min}\left(1 - H\left(\frac{x}{d(p, q)} - 1\right),\right.$$

$$\left. 1 - H\left(\frac{y}{d(q, r)} - 1\right)\right) = \operatorname{Min}(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y))$$

și suficiența condiției este demonstrată, deoarece

$$1 - F_{pr}(x + y) = 1 - H\left(\frac{x + y}{d(p, r)} - 1\right) = 1 \geqslant \operatorname{Min}(1 -$$

$$- F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y)).$$

Să arătăm acum că condiția pusă este și suficientă.

Să presupunem, prin absurd că

$$d(p, r) < d(p, q) + d(q, r)$$

Scanned with OKEN Scanner

și să luăm $x = d(p, q)$, $y = d(q, r)$. În acest caz

$$1 - F_{pr}(x + y) = 1 - H\left(\frac{x + y}{d(p, r)} - 1\right) = 0 < 1 =$$

$$= \operatorname{Min}\left(1 - H\left(\frac{x}{d(p, q)} - 1\right), 1 - H\left(\frac{y}{d(q, r)} - 1\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Min}(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y))$$

care reprezintă o contradicție. Teorema este demonstrată.

În cazul spațiilor metrice probabiliste care sînt E-spații, A. Sklar a introdus o nouă definiție a conceptului de „între" mai strîns legat de conceptele probabiliste.

DEFINIȚIA 6.8. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma, $T_m(a, b) = \max\{a + b - 1,0\}$ și care este un E-spațiu cu (Ω, a, P) și spațiul metric (M,d). Dacă p, q, r sînt S, atunci probabilitatea ca punctul q să fie între p și r este dată de formula

$$B(p, q, r) = P\{t, t \in \Omega, d(p(t), r(t)) = d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t))\}.$$

Următoarea teoremă arată legătura cu conceptul de „între" introdus de K. Menger.

TEOREMA 6.9. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist ca în definiția 6.8. În acest caz dacă $p,q,r \in S$ și $B(p,q,r) = 1$ atunci p-q-r adică punctul q este între p și r în sensul definiției lui Menger 6.6.

Demonstrație. Fie deci $p,q,r \in S$ astfel ca $B(p,q,r) = 1$ și $x,y \geqslant 0$. Vom avea

$$1 - F_{pr}(x + y) = 1 - P(t, d(p(t), r(t)) < x + y) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - P(t, d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t)) < x + y) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - P(t, d(p(t), q(t)) < x) - P(t, d(q(t), r(t)) < y) =$$

$$= (1 - F_{pq}(x)) + (1 - F_{qr}(y)) - 1.$$

Cum $1 - F_{pr}(x + y) \geqslant 0$ rezultă că

$$1 - F_{pr}(x + y) \geqslant T_m(1 - F_{pq}(x), 1 - F_{qr}(y))$$

Scanned with OKEN Scanner

și teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă arată din nou legătura dintre conceptul lui Menger de „între" și numărul $B(p,qr)$.

TEOREMA 6.10. Există un spațiu metric probabilist (S,F) care este E-spațiu și trei puncte p,q,r astfel ca p-q-r și $B(p,q,r) = 0$.

Demonstrație. Fie $S = (p,q,r)$ o mulțime formată din trei elemente și G o funcție definită în modul următor :

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

și $\Omega = \{r,\ r \geqslant 0\}$ iar $\mathscr{B}$ corpul mulțimilor măsurabile Lebesgue din Ω și P definită prin

$$P(A) = \int_A \mathrm{d}G(x)$$

oricare ar fi $A \in \mathscr{B}$. Să definim metricile δ_t pe S prin

$$\delta_t(l,s) = \begin{cases} 0, & l,s \in S,\ l = s, \\ t, & l,\ s \in S,\ l \neq s. \end{cases}$$

Pentru orice $l,\ s \in S$ și x real să punem

$$F_{ls}(x) = P(t,\ \delta_t(l,s) < x).$$

În acest caz $F_{ls} = G$ dacă $l \neq s$ și $F_{ls} = H$ dacă $l = s$. În acest caz (S,F) este un spațiu metric probabilist care este metric generat în sensul lui Stevens (definiția 5.2). Conform teoremei 5.16, (S,F), este izometric cu un E-spațiu. Dacă $p \neq q \neq r$ atunci

$$B(p,q,r) = P(t,\ \delta_t(p,r) = \delta_t(p,q) + \delta_t(q,r)) =$$
$$= P(t, t = t + t) = P(\emptyset) = 0,$$

Să arătăm că $p - q - r$. Fie deci $x,\ y \geqslant 0$ și cum

$$1 - e^{-y} \geqslant 0 \text{ și } 1 \geqslant e^{-x}$$

avem că

$$1 - e^{-y} \geqslant e^{-x} - e^{-x-y}$$

Scanned with OKEN Scanner

care ne dă că

$$e^{-x-y} \geqslant e^{-x} + e^{-y} - 1$$

și care este echivalentă cu

$$1 - F_{pr}(x+y) \geqslant (1 - F_{pq}(x)) + (1 - F_{qr}(y)) - 1.$$

Argumentînd exact ca la teorema 6.9 deducem că $p-q-r$. Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă arată, în condiții speciale, o legătură mai strînsă între probabilitatea $B(p,q,r)$ și relația „între".

TEOREMA 6.11. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma, Min și care este un E-spațiu cu (Ω, B, P) și spațiul metric (M,d). Atunci pentru $p,r \in S$ dacă există $a > 0$ astfel ca $F_{pr}(x) = H(x-a)$, are loc relația

$$p - q - r \Leftrightarrow B(p,q,r) = 1.$$

Demonstrație. Dacă $B(p,q,r) = 1$, atunci conform celor de mai înainte are loc $p - q - r$. Să presupunem acum că $p - q - r$ și să arătăm că $B(p,q,r) = 1$. Fie pentru aceasta I, mulțimea numerelor raționale din $[0,1]$, și pentru orice $\alpha \in I$ să punem

$$B_\alpha = \{t, d(p(t), q(t)) \leqslant \alpha a\}$$

$$C_\alpha = \{t, d(q(t), r(t)) \leqslant (1-\alpha)\, a\}$$

și să definim

$$E_\alpha = \Omega - (B_\alpha \cup C_\alpha).$$

Cum $p - q - r$ rezultă că pentru orice $x, y \geqslant 0$ avem

$$1 - F_{pr}(x+y) \geqslant 1 - F_{pq}(x) + 1 - F_{qr}(y) - 1$$

adică

$$F_{pr}(x+y) \leqslant F_{pq}(x) + F_{qr}(y).$$

În acest mod oricare ar fi $\alpha \in I$ și $\varepsilon > 0$,

$$F_{pr}(a+\varepsilon) \leqslant F_{pq}(a+\varepsilon) + F_{qr}((1-\alpha)a)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$1 \leqslant F_{pq}(a + 0) + F_{qr}((1 - \alpha)a)$$

și deci oricare ar fi $\alpha \in I$

$$(1 - P(B_\alpha) - P(C_\alpha)) \leqslant 0.$$

Cum însă

$$B_\alpha \cap C_\alpha = \{t, d(p(t), q(t)) < \alpha\, a\} \cap \{t, d(q(t), r(t)) \leqslant (1 - \alpha)\, a\} \subseteq$$

$$\subseteq \{t, d(p(t), r(t)) < a\},$$

rezultă că

$$P(B_\alpha \cap C_\alpha) \leqslant F_{pr}(a) = 0.$$

În acest mod, oricare ar fi $\alpha \in I$ avem

$$P(E_\alpha) = P(\Omega - (B_\alpha \cup C_\alpha)) = P(\Omega) - P(B_\alpha \cup C_\alpha) = 1 - (P(B_\alpha) +$$

$$+ P(C_\alpha)) - P(B_\alpha \cap C_\alpha)) = (1 - P(B_\alpha))(C_\alpha) + P(B_\alpha \cap C_\alpha) = 0 =$$

$$= 1 - P(B_\alpha) - P(C_\alpha) + \ldots = 0.$$

Fie $D = \{t, d(p(t), q(t)) \neq a\}$ și cum $F_{pr}(x) = H(x - a)$ rezultă că $P(D) = 0$. Deci pentru orice $\alpha \in I$, dacă punem

$$G_\alpha = (B_\alpha - (D \cup (B_\alpha \cap C_\alpha))) \cup (C_\alpha - (D \cup (B_\alpha \cap C_\alpha)))$$

avem că

$$\Omega = (E_\alpha - D) \cup D \cup ((B_\alpha \cap C_\alpha) - D) \cup G_\alpha$$

și fiecare mulțime ce intervine în această reuniune este disjunctă de celelalte. Cum $E_\alpha - D$, D și $(B_\alpha \cup C_\alpha) - D$ au probabilitatea zero deducem că oricare ar fi $\alpha \in I$, $P(G_\alpha) = 1$ și $P(\bigcap G_\alpha) = 1$. După ce vom arăta că $\bigcap G_\alpha \subseteq A$ cu

$$A = \{t, d(p(t), r(t)) = d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t))\}$$

teorema va fi complet demonstrată.

Fie $t \notin A$ și deci

$$d(p(t), r(t)) < d(p(t), q(t)) + d(q(t), r(t)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $t \in D$ atunci este clar că $\bigcap G_\alpha \ni t$ și deci putem presupune că avem relația $t \notin D$. În acest caz însă $d(p(t), q(t)) = a$ și fie $\beta \in I$, astfel ca

$$\frac{a - d(q(t), r(t))}{a} < \beta < \frac{d(p(t), q(t))}{a}.$$

Cum în acest caz avem $\beta\, a < d(p(t), q(t))$ și $(1 - \beta)\, a < d(p(t), r(t))$ care ne dă că $t \notin G_\alpha$, afirmația $\bigcap G_\alpha \subseteq A$ este demonstrată.

Vom da acum cîteva proprietăți ale relației „între" în cazul unor spații metrice probabiliste de tip special.

Următoarea teoremă are o demonstrație simplă și o vom omite.

TEOREMA 6.12. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma $T = T_m$, atunci, oricare ar fi $p,q,r \in S$ au loc următoarele afirmații:

1) $F_{pq}(0^+) = B(p, q, r)$,

2) $B(q, r, q) \geqslant T_m(B(p, q, r), B(p, r, q))$,

3) $B(p, q, r) \geqslant T_m(B(p, q, r), B(p, r, s))$,

4) $1 + B(p, q, p) + B(q, r, q) + B(r, p, r) \geqslant B(q, p, r) + B(p, q, r) + B(p, r, q)$,

5) $B(p, q, r) = B(r, q, p)$,

6) $F_{pq}(x) \geqslant T_m(B(p, q, r), F_{qr}(x))\ \forall\ x \in R$.

Fie (S,F) un spațiu metric probabilist de tip Menger în raport cu t-norma $T = T_m$ și care este de asemenea un E-spațiu. Are loc:

TEOREMA 6.13. Au loc următoarele afirmații:

1° dacă $B(p, r, s) = 1$ atunci $B(p, q, r) \geqslant B(p, q, r)$,

2° dacă F_{pq}, F_{qr}, F_{pr} sînt continue în zero atunci

$$B(q, p, r) + B(p, q, r) + B(p, r, q) \leqslant 1,$$

3° dacă $B(p, q, r) = 1$ atunci $F_{pq}(x) \geqslant F_{pr}(x)\ \forall\ x \in R$.

Demonstrație. Afirmația 1° rezultă din teorema 6.12 (3), afirmația 2° din aceeași teoremă (1.4) și 3° din (6).

Scanned with OKEN Scanner

Vom menționa că se poate arăta că

$$C(\alpha) = \{q, B(p,q,r) \geqslant \alpha\},$$

cu $\alpha \in [0,1]$ și p, r puncte arbitrare în S, este o mulțime închisă în spațiul metric probabilist (S,F).

6.3. Relația „între" în spații de tip Wald

Fie (S,F) un spațiu metric probabilist. Reamintim că se spune că (S,F) este de tip Wald dacă oricare ar fi p, q, $r \in S$ avem

$$F_{pr}(x) \geqslant (F_{pq} \otimes F_{qr})(x).$$

În capitolul 1, teorema 1.8, am arătat că orice spațiu de tip Wald este un spațiu de tip Menger pentru t-norma = Prod: $(T(a,b) = ab)$. Este ușor de văzut că

$$(F_{pq} \otimes F_{qr})(x) = \int_0^x F_{pq}(x-y)\,\mathrm{d}F_{qr}(y) = \int_0^x F_{qr}(x-y)\mathrm{d}F_{pq}(y),$$

deoarece funcțiile F sînt nule pentru $x \leqslant 0$.

Definiția 6.14. Dacă p,q,r sînt în S și $p \neq r$, se spune că punctul q este între p și r dacă $F_{pr} = F_{pq} \otimes F_{qr}$. Vom nota pe scurt pqr.

Teorema 6.15. Au loc relațiile:

(1) dacă are loc pqr atunci avem și rqp,
(2) dacă are loc pqr atunci nu avem qrp și nici rqp,
(3) dacă are loc pqr și prs atunci avem pqs și qrs.

Demonstrație. (1). Cum avem

$$F_{pr} = F_{pq} \otimes F_{qr},$$

atunci

$$F_{pq} \otimes F_{qr} = F_{qr} \otimes F_{pq} = F_{rq} \otimes F_{qp}$$

și afirmația este demonstrată.

(2). Să presupunem că are loc qrp și deci

$$F_{pq} = F_{qr} \otimes F_{rp},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$F_{pr} = F_{pq} \otimes F_{qr} = F_{rp} \oplus (F_{qr} \oplus F_{qr})$$

care ne dă că

$$F_{qr} \otimes F_{qr} = \varepsilon$$

şi în acest fel am dat peste o contradicţie.

Deoarece cealaltă parte a afirmaţiei precum şi afirmaţia (3) se demonstrează în mod similar, noi vom lăsa demonstraţiile în seama cititorului.

Următoarea teoremă este utilă în stabilirea unei proprietăţi de închidere.

TEOREMA 6.16. Dacă $F > F'$ şi G este o funcţie de repartiţie arbitrară atunci

$$F \oplus G \geqslant F' \otimes G.$$

Demonstraţie. În adevăr, avem

$$(F \otimes G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\mathrm{d}G(y) \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} F'(x-y)\mathrm{d}G(y) = (F' \otimes G)(x)$$

şi teorema este demonstrată.

Rezultatul privind proprietatea de închidere este dat în:

TEOREMA 6.17. Dacă $\{q_n\}$ este un şir de puncte într-un spaţiu de tip Wald, astfel ca pq_nr există oricare ar fi n şi dacă $\{q_n\}$ converge către un punct q distinct de p şi r, atunci avem relaţia pqr.

Demonstraţie. Cum avem relaţiile

$$F_{pq} \geqslant F_{pq_n} \otimes F_{q_nq},$$

$$F_{qr} \geqslant F_{qq_n} \otimes F_{q_nr},$$

deducem că avem şi relaţia

$$F_{pq} \otimes F_{qr} \geqslant F_{pq_n} \otimes F_{q_nq} \otimes F_{qq_n} \otimes F_{q_nr}.$$

Cum însă $F_{pr} = F_{pq_n} \oplus F_{q_nr}$, deducem că relaţia de mai sus se scrie

$$F_{pq} \otimes F_{qr} \geqslant F_{pr} \otimes F_{qq_n} \otimes F_{q_nq}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum prin definiţie funcţia $x \to F_{pq}(x)$ este continuă la stînga, rezultă că pentru fiecare $x > 0$ şi $\lambda > 0$ există $\varepsilon \in (0,x)$ astfel ca

$$F_{pr}(x - \varepsilon) > F_{pr}(x) - \frac{1}{2}\lambda.$$

Să alegem δ astfel ca $F_{q_n}(x) < \frac{1}{2}\lambda\delta$ şi cum $q_n \to q$, există q_n într-o vecinătate $U_q\left(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\delta\right)$ ceea ce înseamnă, din definiţia noţiunii de vecinătate într-un spaţiu metric probabilist că

$$F_{qq_n}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{2}\delta.$$

Utilizînd un rezultat pe care îl vom da în teorema imediat următoare, teorema 6.18, obţinem că

$$(F_{qq_n} \otimes F_{qq_n})(x) > 1 - \delta \quad \forall\, x \geqslant \varepsilon.$$

Cum însă

$$[F_{pr} \otimes F_{qq_n} \otimes F_{qq_n}](x) = \int_0^x [F_{qq_n} \otimes F_{qq_n}](x - y)\mathrm{d}F_{pr}(y) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{x-\varepsilon} [F_{qq_n} \otimes F_{qq_n}](x - y)\mathrm{d}F_{pr}(y) > (1 - \delta)\int_0^{x-\varepsilon} \mathrm{d}F_{pr}(y) =$$

$$= (1 - \delta)F_{pr}(x - \varepsilon) > (1 - \delta)\left(F_{pr}(x) - \frac{1}{2}\lambda\right) > F_{pr}(x) -$$

$$-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda = F_{pr}(x) - \lambda$$

şi deci

$$(F_{pq} \otimes F_{qr})(x) \geqslant F_{pr}(x)$$

oricare ar fi $x > 0$. Această inegalitate împreună cu inegalitatea de definiţie a spaţiului metric probabilist de tip Wald, ne dă că

$$(F_{pq} \otimes F_{qr})(x) = F_{pr}(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică relația pqr. Teorema este demonstrată

Să trecem acum la teorema pe care am folosit-o în demonstrația de mai sus.

TEOREMA 6.18. Dacă $x \to F(x)$ și $x \to F'(x)$ sînt două funcții de repartiție, astfel ca

$$F(0) = F'(0),$$

atunci oricare ar fi x și y în F_+ avem

$$(F \otimes F')(x + y) \geqslant F(x)F'(y).$$

Demonstrație. Această relație a fost demonstrată în Cap. I, teorema 1.8 și exprimă faptul că un spațiu de tip Wald este un spațiu metric probabilist de tip Menger pentru $T(a,b) = ab$.

Exact ca în teorema 6.17 putem demonstra și:

TEOREMA 6.19. Dacă $\{r_n\}$ este un șir de puncte ale unui spațiu Wald și pqr_n există oricare ar fi n, iar $r_n \to r$, care este distinct de p și q atunci are loc relația pqr.

Înainte de a trece la studiul noțiunii de segment într-un spațiu metric probabilist de tip Wald vom face cîteva observații privind noțiunea de mulțime convexă într-un spațiu metric în care s-a definit noțiunea de „între".

Este de remarcat noțiunea de mulțime convexă propusă de H. Minkovski: o mulțime este convexă dacă este închisă și conține odată cu două puncte din ea segmentul care le unește.

Evident că această noțiune de mulțime convexă presupune definită noțiunea de segment.

Există o definiție propusă de K. Menger a noțiunii de mulțime convexă și care nu presupune noțiunea de segment: o mulțime este convexă dacă oricare ar fi perechea de puncte p și q din ea conține orice punct r situat „între" p și q.

Se poate arăta ușor că aceste noțiuni coincid în cazul spațiilor euclidiene.

În spații metrice complete s-a arătat următorul fapt: dacă M este o mulțime închisă și convexă în sensul lui Menger, atunci oricare ar fi p și q în M există un arc simplu care unește cele două puncte și care este congruent cu segmentul $[0,1]$, adică este un homeomorfism izometric pe $[0,1]$. Un astfel de arc se numește segment, care unește punctele p și q. Este cazul să reamintim aici că în demonstrația acestei importante teoreme a fost utilizată inducția transfinită și că mai tîrziu Aronszajn a demonstrat că acest argument poate fi evitat.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea o demonstrație simplă a fost stabilită de Menger și Milgram.

Am inclus discuția de mai sus deoarece faptele expuse pot pune în lumină problema pentru cazul spațiilor Wald.

Vom da mai întîi noțiunea de segment într-un spațiu metric probabilist de tip Wald.

DEFINIȚIA 6.20. Prin segment care unește punctele p și q, în spațiul Wald (S,F), se înțelege un arc cu capetele în p și q și astfel ca dacă r, s sînt puncte distincte ale arcului și nu coincid cu p și q atunci avem una din relațiile prs sau spr.

Pentru noțiunea de mulțime convexă vom utiliza o definiție similară cu cea propusă de Menger pentru spații metrice.

DEFINIȚIA 6.21. O mulțime M din spațiul Wald se spune că este convexă dacă oricare ar fi p și q în M conține orice punct între p și q.

Vom introduce acum o clasă de spații Wald în care vom da unele rezultate privind convexitatea.

DEFINIȚIA 6.22. Un spațiu Wald (S, F) se spune regulat dacă oricare ar fi $p, q \in S$, există $\varepsilon > 0$ astfel ca

1) F_{pq} este continuă în $x = \varepsilon$,

2) $F_{pq}(x) < F_{pq}(\varepsilon)$ dacă $x < \varepsilon$.

Să demonstrăm mai întîi:

TEOREMA 6.23. Dacă (S, F) este un spațiu metric Wald, care este regulat (în $x = \varepsilon$), atunci pentru orice $p \neq q$ din S avem

1) $F_{pq}(x) < 1 \; \forall \; x \leqslant \varepsilon$,

2) dacă prq are loc atunci $F_{qr}(x) > F_{pr}(x) \; \forall \; 0 < x \leqslant \varepsilon$.

Demonstrație. Fie p și q cu $p \neq q$. Atunci există s între p și q și cum $p \neq s$, rezultă că există $\delta \leqslant \varepsilon$ astfel ca $F_{ps}(x) < 1$ oricare ar fi $x \leqslant \delta$.

Avem relația

$$F_{pq}(\varepsilon) = [F_{ps} \otimes F_{sq}](\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} F_{ps}(\varepsilon - y)\, dF_{sq}(y) =$$

$$= \int_0^{\varepsilon-\delta} F_{ps}(\varepsilon - y)\, dF_{sq}(y) + \int_{\varepsilon-\delta}^{\varepsilon} F_{ps}(\varepsilon - y)\, dF_{sq}(y) < F_{sq}(\varepsilon - \delta) +$$

$$+ \{F_{sq}(\varepsilon) - F_{sq}(\varepsilon - \delta)\} = F_{sq}(\varepsilon) \leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $F_{pq}(x) \leqslant F_{pq}(\varepsilon) < 1$, oricare ar fi $x \leqslant 1$, deducem că

$$F_{pr}(x) = \int_0^x F_{pq}(x - y)\mathrm{d}F_{qr}(y) < F_{qr}(x)$$

şi afirmaţia teoremei este demonstrată.

Următoarea teoremă ne dă unele informaţii privind topologia spaţiilor Wald considerate în definiţia 6.22.

TEOREMA 6.24. Dacă (S,F) este un spaţiu Wald regulat şi compact (în $x = \varepsilon$), atunci familia de vecinătăţi

$$\{\widetilde{U}(\lambda)\} = \{U(\varepsilon, \lambda),\ \lambda > 0\}$$

este o bază de vecinătăţi pentru topologia lui (S,F).

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că nu există vecinătate de forma $U(\delta, \mu)$, care să nu conţină o vecinătate de forma $U(\varepsilon, \lambda)$. Dacă presupunem că o astfel de vecinătate există, să luăm $\lambda_n \to 0$ şi în acest caz există p_n, $q_n \in S$, astfel ca

1. $p_n, q_n \in U(\varepsilon, \lambda_n)$,
2. $p_n, q_n \notin U(\delta, \mu)$.

Aceste relaţii, transcrise cu ajutorul funcţiilor de repartiţie, devin

1. $F_{p_n q_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda_n$,
2. $F_{p_n q_n}(\delta) < 1 - \mu$.

Din ipoteza de compacitate rezultă că, putem presupune fără a restrînge generalitatea că $p_n \to p$ şi $q_n \to q$. Dacă $p \neq q$, din teorema de mai sus rezultă că $F_{pq}(\varepsilon) < 1$. Cum într-un spaţiu Wald aplicaţia

$$(p, q) \to F_{pq}(\varepsilon)$$

este continuă, rezultă că

$$F_{pq}(\varepsilon) = \lim F_{p_n q_n}(\varepsilon) = 1,$$

care este o contradicţie. Deci trebuie să avem $p = q$ şi în acest caz evident că $F_{pq}(x) = 1$, oricare ar fi $x > 0$ şi

$$1 = F_{pq}(\delta) = \liminf F_{p_n q_n}(\delta) \leqslant 1 - \mu < 1$$

Scanned with OKEN Scanner

care este o contradicție. În acest mod teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă o proprietate de convexitate a vecinătăților $\widetilde{U}(\varepsilon)$.

TEOREMA 6.25. Dacă (S,F) este un spațiu Wald convex, compact și care este regulat (în $x = \varepsilon$), atunci oricare ar fi vecinătatea $U(\varepsilon,\lambda)$, S conține, oricare ar fi $p \neq r$, un punct q astfel ca :

1. pqr există,
2. $(p,q) \in U(\varepsilon, \lambda)$.

Demonstrație. Fie p și r date, iar Q_{pr} mulțimea (nevidă) a punctelor b din S care sînt între p și r. Fie acum $U(\varepsilon, \lambda)$ și să presupunem că afirmația teoremei nu este adevărată. Deci nu există $q \in Q_{pr}$ astfel ca $(p, q) \in U(\varepsilon, \lambda)$. Rezultă că oricare ar fi $q \in Q_{pr}$ avem $F_{pr}(\varepsilon) \leqslant \leqslant 1 - \lambda$. Cum p nu aparține închiderii mulțimii Q_{pr}, rezultă că avem

$$\overline{Q}_{pr} \cup \{r\} = Q_{pr} \cup \{r\}$$

care este o submulțime închisă într-un spațiu Hausdorff compact, deci compactă. Cum funcția

$$x \to F_{pq}(x)$$

este continuă în $x = \varepsilon$, funcția

$$q \to F_{pq}(\varepsilon), q \in Q_{pr} \cup \{r\}$$

definită pe o mulțime compactă este continuă și deci își atinge marginea superioară într-un punct pe care să-l notăm cu s. Deci

$$F_{ps}(\varepsilon) = 1 - \mu$$

și deci $1 - \mu \leqslant 1 - \lambda < 1$, de unde rezultă că $p \neq s$. Deducem că spațiul S conține un punct t între p și s și care este și între p și r. Din teorema 6.23 rezultă că

$$F_{pt}(\varepsilon) > 1 - \mu$$

și $1 - \mu$ nu este supremul funcției $F_{pq}(\varepsilon)$ cu q între p și s. De aici rezultă că oricare ar fi p și r există puncte între p și r suficient de aproape de p. Teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 6.26. Fie (S, F) un spațiu Wald convex, compact și regulat (în $x = \varepsilon$). În acest caz pentru orice $(p, r) \in S$ există q astfel ca pqr și $F_{pq}(\varepsilon) = F_{ps}(\varepsilon)$.

Demonstrație. Funcția $q \to |F_{pq}(\varepsilon) - F_{qr}(\varepsilon)|$ este continuă și deci cum S este compact își atinge minimul într-un punct s. Să presupunem că acest infimum nu este zero și deci

$$F_{ps}(\varepsilon) - F_{sr}(\varepsilon) = 2m > 0.$$

Din teorema de mai sus rezultă că există puncte între r și s suficient de aproape de s și deci există t între s și r care este și între p și r, astfel ca

$$0 < F_{ps}(\varepsilon) - F_{pt}(\varepsilon) < m,$$

$$0 < F_{tr}(\varepsilon) - F_{sr}(\varepsilon) < m.$$

Cum $F_{ps}(\varepsilon) - F_{sr}(\varepsilon)$ este infimul funcției $|F_{pq}(\varepsilon) - F_{rq}(\varepsilon)|$ deducem că $F_{pt}(\varepsilon) - F_{rt}(\varepsilon)$ trebuie să fie negativ și deci

$$F_{ps}(\varepsilon) - F_{rs}(\varepsilon) < 2m,$$

care este o contradicție și astfel teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă dă un mod de a construi anumite puncte care ne vor permite apoi să demonstrăm că oricare ar fi două puncte într-un spațiu Wald convex și compact regulat, există un segment care le unește.

TEOREMA 6.27. Fie (S, F) un spațiu Wald convex compact și regulat. Dacă $\{q_n\}$ este un șir de puncte din S cu proprietățile:

1. $q_0\, q_{n+1}\, q_n$,
2. $F_{q_0 q_{n+1}}(\varepsilon) = F_{q_{n+1} q_n}(\varepsilon)$

oricare ar fi n atunci $\{q_n\}$ converge către q_0.

Demonstrație. Cum spațiul S este compact există un subșir convergent al șirului $\{q_n\}$ care converge către q. Cum are loc $q_0\, q_{n+1}\, q_n$ rezultă că șirul $\{q_n\}$ converge către q. Dacă q nu este q_0 atunci avem

$$F_{q_0 q}(\varepsilon) = 1 - \mu < 1$$

Scanned with OKEN Scanner

și pentru n suficient de mare avem că $F_{qq_n}(\varepsilon) > 1 - \mu$. Dar avem și $F_{q_0q}(\varepsilon) > F_{q_0q_{n+1}}(\varepsilon)$, $F_{q_{n+1}q_n}(\varepsilon) > F_{qq_n}(\varepsilon)$ oricare ar fi n. Prin ipoteză însă

$$F_{q_0q_{n+1}}(\varepsilon) = F_{q_{n+1}q_n}(\varepsilon)$$

și deci

$$F_{q_0q_n}(\varepsilon) > F_{q_0q_{n+1}}(\varepsilon) > F_{qq_n}(\varepsilon)$$

care este o contradicție. Teorema este astfel demonstrată.

Teorema pe care o dăm acum arată că clasa de spații Wald studiată pînă acum posedă proprietatea că oricare ar fi punctele p și q există un segment care le unește.

TEOREMA 6.28. Dacă (S, F) este un spațiu metric probabilist de tip Wald, care este convex, compact și regulat, atunci pentru orice p și q în S segmentul care le unește este în S.

Demonstrație. Fie $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ și considerăm $\{\alpha_n\}$ un

șir de numere definite prin $\alpha_n = (2m+1)\,2^{-n}$ cu $0 < (2m+1)2^{-n} < 1$, iar m și n sînt astfel:

(α) dacă $\alpha_i = (2m+1)2^{-n}$ și $\alpha_j = (2m+3)\,2^{-m}$, atunci $i < j$.

(β) dacă $\alpha_i = (2m+1)2^{-n}$ și $\alpha_j = 2^{-n-1}$, atunci $i < j$.

Fie q_0 și q_1 două puncte arbitrare în S. Să definim

$$\sigma : \{\alpha_n\} \to S$$

prin $\sigma(\alpha_0) = q_0$, $\sigma(\alpha_1) = q_1$, $\sigma(\alpha_2) = q_2$, unde q_2 este punctul între q_0 și q_1 astfel ca $F_{q_0q_2}(\varepsilon) = F_{q_2q_1}(\varepsilon)$. Să presupunem că am definit aplicația pînă la indicele $i-1$ și să o definim pentru i. Pentru a defini pe $\sigma(\alpha_i)$ să alegem perechea $\alpha_j, \alpha_k, j < i, k < i, \alpha_j < \alpha_i < \alpha_k$ și $\alpha_k - \alpha_j$ cel mai mic posibil. Notăm cu q_j punctul cu proprietatea $F_{q_iq_j}(\varepsilon) = F_{q_kq_j}(\varepsilon)$ și să punem $\sigma(\alpha_i) = q_i$. Cum $\alpha_i = \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_k)$, din teorema de mai înainte șirul $\{q_{ij}\}$ este un șir Cauchy, dacă și numai dacă șirul corespunzător de numere $\{\alpha_{ij}\}$ este un șir Cauchy. Deci funcția σ poate fi extinsă la o funcție continuă și biunivocă a

segmentului $[0, 1]$ pe o mulțime compactă din S care conține punctele q_0 și q_1 și această mulțime va fi arcul care satisface condițiile din teoremă.

6.4. Metrica lui Kingman pentru spații Wald

Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Wald. În [29] J. F. C. Kingman a introdus o metrică (în sens obișnuit) și a studiat noțiunea de convexitate în raport cu această metrică. În cele ce urmează dăm definiția metricii lui Kingman și cîteva proprietăți legate de convexitate.

DEFINIȚIA 6.29. Prin metrica lui Kingman atașată spațiului metric probabilist de tip Wald se înțelege aplicația

$$\varrho : (p, q) \to -\lg\left[\int_0^\infty e^{-x}\, dF_{pq}(x)\right].$$

Are loc:

TEOREMA 6.30. ϱ este o metrică.

Demonstrație. Este evident că pentru orice $p, q \in S$ avem $0 \leqslant \varrho(p, q) \leqslant 1$ și $p \equiv q$ dacă și numai dacă $\varrho(p, q) = 0$. De asemenea $\varrho(p, q) = \varrho(q, p)$. Rămîne să arătăm că este adevărată și inegalitatea triunghiului. Fie p, q, r puncte în S și $x \geqslant 0$. În acest caz avem

$$\int_0^\infty e^{-x} d(F_{pq} \otimes F_{qr}) = \int_0^\infty e^{-x} dF_{pq}(x) \cdot \int_0^\infty e^{-y} dF_{qr}(y)$$

de unde rezultă că

$$\left(g_{pq} = \int_0^\infty e^{-x} dF_{pq}(x)\right),$$

$$g_{pq} g_{qr} = \int_0^\infty e^{-x}\, d(F_{pq} \otimes F_{qr})(x) \leqslant \int_0^\infty e^{-x}\, dF_{pr}(x) = g_{pr}$$

și cum $\varrho(p, q) = -\lg g_{pq}$, inegalitatea triunghiului este echivalentă cu relația obținută. Teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Are loc următoarea afirmaţie a cărei demonstraţie este evidentă.

TEOREMA 6.31. În spaţiul Wald (S, F), relaţia pqr este echivalentă cu relaţia

$$\rho(p, r) = \rho(p, q) + \rho(q, r).$$

TEOREMA 6.32. Spaţiul (S, F) are ca bază de vecinătăţi, mulţimile

$$\{U(\varepsilon, \lambda),\ \varepsilon > 0,\ \lambda > 0,\ \lambda < 1\}.$$

Demonstraţie. Cum avem relaţia

$$e^{-\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} dF_{pq}(x) \leqslant g_{pq} \leqslant \int_0^{\varepsilon} dF_{pq}(x) + e^{-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{pq}(x),$$

care poate fi scrisă

$$e^{-\varepsilon}F_{pq}(\varepsilon) \leqslant e^{-\rho(p,q)} \leqslant e^{-\varepsilon} + (1 - e^{-\varepsilon})F_{pq}(\varepsilon),$$

deducem că

$$V(\delta) = \{(p, q),\ \rho(p, q) < \delta\}$$

conţine vecinătatea $U\left(\frac{1}{2}\delta, (1 - e^{-\frac{1}{2}\delta})\right)$ dacă $\varepsilon > 0$ şi $\lambda \in [0, 1)$. De asemenea $U(\varepsilon, \lambda)$ conţine vecinătatea $V(-\lg(1 - \lambda + \lambda e^{-\varepsilon}))$ şi teorema este demonstrată.

Teorema de mai sus arată că spaţiul Wald admite pe ρ ca metrică şi din teorema de mai înainte, relaţia „între" în spaţiul metric astfel construit coincide cu relaţia „între" în sens obişnuit (adică cel al spaţiilor metrice).

6.5. Metrică Wald-Harnack probabilistă

Într-o lucrare recentă [118] a fost introdusă o noţiune interesantă care îşi are originea în cercetările profunde din teoria funcţiilor complexe şi armonice.

Scanned with OKEN Scanner

Fie Ω o mulțime abstractă și $\mathscr{I}$ familia funcțiilor $h : \Omega \to (0, \infty)$ care au proprietatea lui Harnack : există $a = a(x, y)$ astfel ca pentru orice h

$$\frac{1}{a} \leqslant \frac{h_{(x)}}{h_{(y)}} \leqslant a.$$

Fie $\mathscr{H}$ o familie de funcții definite pe $\Omega \times P_+$ cu valori în $(0, \infty)$.

Pe mulțimea $\mathscr{F}$ se poate defini o pseudo-metrică care este metrică dacă $\mathscr{F}$ separă punctele mulțimii.

DEFINIȚIA 6.33. Se spune că $\mathscr{H}$ verifică proprietatea probabilistă a lui Harnack, dacă pentru orice $p, q \in \Omega$ există o funcție $F \in \Delta$ astfel ca penru fiecare $h \in \mathscr{H}$ și x, pentru care $F(x) > 0$, să avem

$$F(x) \leqslant \frac{h_{(p,x)}}{h_{(q,x)}} \leqslant \frac{1}{F_{(x)}}.$$

Vom presupune că $F_0 = 0$, oricare ar fi F care intervine în definiție.

Să punem

$$\mathscr{D}_{p,q}(x) = \sup_F \left\{ F_{(x)} \; F_{(x)} \leqslant \frac{h_{(p,x)}}{h_{(q,x)}} \leqslant \frac{1}{F_{(x)}} \right\}$$

care este în Δ. În acest mod pe produsul cartezian $\Omega \times \Omega$ putem defini o aplicație cu valori în Δ, punînd

$$\mathscr{F}_{p,q} = \mathscr{F}_{p,a}.$$

Vom remarca faptul că pentru orice $h \in \mathscr{H}$ avem

$$D_{pq}(x) \leqslant \frac{h_{(p,x)}}{h_{(p,x)}} \leqslant \frac{1}{D_{pq}(x)},$$

oricare ar fi x, $D_{pq}(x) > 0$. Dacă $D_{pq}(x) = 0$ vom pune $\frac{1}{D_{pq}(x)} = \infty$ și inegalitatea rămîne adevărată și în acest caz. Este natural să se

pună problema naturii spațiului $(S, \mathscr{F})$. În cele ce urmează vom da structura acestui spațiu

$$\mathscr{H}_x = \{p \to h_{(p,x)},\ h \in \mathscr{H} \text{ definită pe } \Omega.$$

Are loc:

TEOREMA 6.34. Dacă există $x \in (0, \infty)$ astfel ca $\mathscr{H}_x$ separă punctele lui Ω, atunci (Ω, F) este un spațiu Wald.

Demonstrație. Fie

$$D_{pq}(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

și deci avem

$$\sup \left\{ F(x),\ F(x) \leqslant \frac{h_{(p,x)}}{h_{(q,x)}} \leqslant F(x)\ \forall\ h \in \mathscr{H} \right\} \subset 1$$

oricare ar fi

$$x > 0, \text{ de unde } \frac{h_{(p,x)}}{h_{(q,x)}} = 1$$

pentru orice $h \in \mathscr{H}$ în $x > 0$. Cum există $x > 0$ astfel ca $F(x) > 0$, separă punctele lui Ω și rezultă $p = q$. Dacă $p = q$, atunci $F(x) = 1$, oricare ar fi $x \geqslant 0$ și deci $D_{pq} = H$, prima axiomă fiind adevărată. A doua axiomă este evidentă deoarece $F(0) = 0$, oricare ar fi F. Să arătăm că este adevărată și cea de a treia axiomă. În adevăr dacă avem

$$F(x) \leqslant \frac{h_{(p,x)}}{h_{(p,x)}} \leqslant \frac{1}{F_{(x)}},$$

atunci avem și

$$F_{(x)} \leqslant \frac{h_{(q,x)}}{h_{(p,x)}} \leqslant \frac{1}{F_{(x)}},$$

de unde rezultă afirmația. Pentru cea de a patra axiomă să observăm că dacă

$$D_{pq}(x) \leqslant \frac{h_{(q,x)}}{h_{(q,x)}} \leqslant \frac{1}{F_{(x)}},$$

$$D_{qr}(x) \leqslant \frac{h_{(q,x)}}{h_{(r,x)}} \leqslant \frac{1}{D_{q,r}(x)},$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci are loc și relația

$$D_{pq}(x)\, D_{qr}(x) \leqslant \frac{h_{(p,x)}}{h_{(r,x)}} \leqslant \frac{1}{D_{pq}(x) D_{qr}(x)}$$

și deci

$$D_{pr}(x) \geqslant D_{pq}(x)\, D_{qr}(x)$$

oricare ar fi $x > 0$ cu proprietatea că $D_{pq}(x) > 0$, $D_{qr}(x) > 0$. Dacă avem $D_{pq}(x) = 0$ sau $D_{qr}(x) = 0$, inegalitatea este evidentă.

Rezultă astfel că

$$D_{pr}(x) \geqslant D_{pq}(x)\, D_{qr}(x) = \int_0^x \mathrm{d}D_{pq}d\,(\mathrm{t}) \int_0^x \mathrm{d}D_{qr}(y) \geqslant \iint\limits_{\substack{t,v\geqslant 0 \\ t+v\leqslant x}} \mathrm{d}D_{pq}(t)\mathrm{d}D_{qr}(y) =$$

$$= \int_0^x \int_0^{x-v} \mathrm{d}D_{pq}(t)\mathrm{d}D_{qr}(y) = \int_0^x D_{pq}(x-y)\mathrm{d}D_{qr}(y) = (D_{pq} \otimes D_{qr})(x)$$

și teorema este demonstrată.

Observație. Ar fi interesant de considerat o metrică nearhimedeană de tip Wald-Harnack și spațiile probabiliste corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

7 Spații normate probabiliste

Este natural să se pună problema extinderii noțiunii de spațiu normat așa după cum a fost extinsă noțiunea de spațiu metric de către K. Menger. Această problemă a fost rezolvată de către A. Șerstnev care a introdus noțiunea de spațiu normat probabilist. În cele ce urmează vom expune unele proprietăți ale spațiilor normate probabiliste și vom da cîteva rezultate privind teoria celei mai bune aproximații în aceste spații; legat de acestea vom introduce spațiile normate probabiliste cu bază și de asemenea unele clase de bază împreună cu unele proprietăți.

7.1. Spațiu normat probabilist

Vom introduce mai întîi noțiunea de funcție triunghiulară.

Fie B mulțimea tuturor funcțiilor nedescrescătoare continue la stînga definite pe mulțimea R și astfel încît

1. $f(x) = 1, \quad x \leqslant 0,$

2. $f(\infty) = 0,$

oricare ar fi $f \in B$. În mulțimea B vom considera o relație de ordine parțială și anume $f \leqslant g$, dacă și numai dacă $f - g \leqslant 0$ și $f < g$ dacă $f \leqslant g$ și există cel puțin un punct x_0 astfel ca $f(x_0) - g(x_0) < 0$. Cel mai mic element al acestei mulțimi (în raport cu relația de ordine parțială) îl vom nota cu $x \to \Delta(x)$ și are proprietatea că $\Delta(x) = 0$ dacă $x > 0$.

Noțiunea de funcție triunghiulară (relativă) o introducem în

DEFINIȚIA 7.1. Fie E o submulțime a lui B. Se spune că $\mu : E \times E \to E$ este o funcție triunghiulară (relativ la E) dacă au loc următoarele proprietăți :

a) Δ este element neutru pentru legea de compoziție μ,

b) oricare ar fi $\xi \in E$

$$\mu(\cdot, \xi) : E \to E$$

este crescătoare, adică $\eta_1 \leqslant \eta_2 \Rightarrow \mu(\eta_1, \xi) \leqslant \mu(\eta_2, \xi)$,

c) $\mu(\xi, \eta) \leqslant \mu_1 (\xi, \eta)$ unde

$$\mu_1(\xi, \eta)(x) = \inf_{t \in [0,1]} \min [\xi(tx) + \eta [(1-t)x].$$

Noțiunea de spațiu normat probabilist o introducem prin:

DEFINIȚIA 7.2. Un spațiu liniar $\mathscr{L}$ peste corpul numerelor reale R sau corpul numerelor complexe C (vom nota cu K unul dintre aceste corpuri), va fi numit spațiu normat probabilist dacă există o aplicație f a spațiului $\mathscr{L}$ cu valori în B și o funcție triunghiulară μ (relativ la o submulțime $E \subset B$) astfel încît următoarele condiții sînt îndeplinite :

1) $f(\varphi) = \Delta \Leftrightarrow \varphi = \theta \in \mathscr{L}$,

2) $f(\alpha\varphi)(x) = f(\varphi)\left(\frac{x}{\alpha}\right)$,

3) $f(\varphi + \psi) \leqslant \mu(f(\varphi), f(\psi))$.

Funcția $\varphi \to f(\varphi)$ o vom numi normă probabilistă și cînd vom spune că $\mathscr{L}$ este un spațiu normat probabilist vom înțelege că f și μ sînt date și au proprietățile scrise mai sus. Pentru a păstra analogia cu spațiile normate se folosește notația

$$f(\varphi)(x) = ||\varphi ; x||.$$

Are loc următoarea teoremă care dă o justificare parțială a definiției de mai sus.

TEOREMA 7.3. Orice spațiu normat poate fi înzestrat cu o normă probabilistă și astfel să devină un spațiu normat probabilist.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să definim norma probabilistă a elementului φ prin

$$||\varphi; x|| = \begin{cases} 1, & x \leqslant ||\varphi|| \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

și drept funcție triunghiulară, funcția μ definită prin

$$\mu(\xi, \eta)(x) = \inf_{t \in [0,1]} \max \{ \xi(tx), \eta(1-t)x \}.$$

Faptul că proprietățile 1) și 2) sînt adevărate pentru această normă probabilistă este evident, iar proprietatea 3) rezultă din inegalitatea triunghiului pentru norma spațiului cît și din definiția funcției μ.

Un fapt interesant este și următorul: orice spațiu numărabil normat poate fi înzestrat cu o structură de spațiu normat probabilist.

Pentru ușurarea lecturii demonstrației vom reaminti noțiunea de spațiu numărabil normat introdusă de Gelfand și Silov.

DEFINIȚIA 7.4. Un spațiu liniar $\mathscr{L}$ peste corpul K se va numi numărabil normat dacă există un șir de seminorme $\{||, ||_n\}_1^\infty$ definite pe $\mathscr{L}$ și astfel încît $||\varphi||_p = 0$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ implică $\varphi = \theta$.

Este ușor de văzut că orice spațiu numărabil normat devine un spațiu metric dacă introducem o distanță $\rho : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \to R$ prin formula

$$\rho(x, y) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^i} \frac{||x-y||_i}{1+||x-y||_i}$$

și convergența în acest spațiu metric coincide cu convergența în spațiul numărabil normat $\mathscr{L}$.

Evident putem presupune că sistemul de seminorme are și proprietatea de monotonie

$$||\varphi||_1 \leqslant ||\varphi||_2 \leqslant \ldots \leqslant ||\varphi||_n \leqslant ||\varphi||_{n+1} \leqslant \ldots. \qquad (7.4.1)$$

În adevăr, este suficient să punem, pentru orice i

$$||\varphi||_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant i} ||\varphi||_j$$

Scanned with OKEN Scanner

care este evident că sînt seminorme și au proprietatea din relația (7.4.1). Rămîne să arătăm că este echivalent cu sistemul inițial. Vom reaminti ce înseamnă că două sisteme de seminorme pe un spațiu liniar sînt echivalente.

DEFINIȚIA 7.5. Două sisteme de seminorme sînt echivalente dacă și numai dacă $x_n \to x$ față de un sistem, atunci $x_n \to x$ față de celălalt sistem și reciproc.

Pentru a demonstra afirmația făcută mai sus este suficient să demonstrăm că $x_n \to x$ în raport cu vechiul sistem implică $x_n \to x$ față de sistemul care are și proprietatea de a fi monoton definit mai sus.

În adevăr, dacă $||x_n - x||_p \to 0$ oricare ar fi p fix, atunci

$$||x_n - x||_p^* = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} ||x_n - x||_j \leqslant \sum_{j=1}^{p} ||x_n - x||_j \to 0$$

și afirmația este astfel demonstrată.

Pentru a demonstra că orice spațiu numărabil normat $\mathscr{L}$ cu sistemul de seminorme $\{ || \; ||_i \}$ monoton, poate fi înzestrat cu o structură de spațiu normat probabilist, să considerăm o variabilă aleatoare cu valori întregi pe care să o notăm cu τ și

$$P(\omega, \tau(\omega) > N) > 0$$

oricare ar fi N. Să definim funcția

$$\xi(x) = P(\tau \geqslant x)$$

și pentru orice $\varphi \in \mathscr{L}$ să punem

$$||\varphi \; ; \; x|| = P(|\varphi|_\tau \geqslant x)$$

De asemenea să punem

$$\varphi([x]) = \begin{cases} \min \{n, \; ||\varphi||_n \geqslant x\}, & \text{dacă } \{n, \; ||\varphi||_n \geqslant x\} \neq 0, \\ \infty, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

În acest caz este clar că are loc relaţia

$$||\varphi\,;x||=\tau(\varphi[x]).$$

În adevăr, dacă $||\varphi||_\tau\geqslant x$, atunci există $n\leqslant\tau$ astfel ca $||\varphi||_n\geqslant x$ şi deci $\min\{m,||\varphi||_m\geqslant x\}=\varphi[x]\leqslant\tau$. Reciproc, dacă $\tau\geqslant\varphi[x]$, atunci $||\varphi||_\tau\geqslant||\varphi||_{\varphi[x]}\geqslant[x]$ şi afirmaţia noastră este demonstrată.

De asemenea avem

$$(\varphi+\psi)[x+y]\geqslant\max\{\varphi[x],\psi[y]\}.$$

Să arătăm că

$$\varphi\to||\varphi\,;x||=\tau(\varphi[x],$$

este o normă probabilistă.

Să presupunem că $\varphi\neq0$ şi deci există $x>0$ astfel ca pentru n_0 să avem $||\varphi||_{n_0}\geqslant x$ şi deci $\varphi[x]\leqslant n_0$. De aici rezultă că

$$||\varphi\,;0||=\xi(\varphi[+0)\geqslant\xi(\varphi[x])\geqslant\xi(n_0)>0.$$

Cum avem relaţia

$$||\varphi\,;x||=P(||\varphi||_\tau\geqslant x)$$

rezultă că avem

$$||\alpha\varphi\,;\,x||=\left\|\varphi\,;\frac{x}{\alpha}\right\|.$$

Mai rîmîne să arătăm că are loc şi proprietatea 3) a normei. Pentru φ, ψ în $\mathscr{L}$ avem

$$||\varphi+\varphi\,;x||=\xi(\varphi+\psi)[(tx+(1-t)x)]\leqslant\xi(\min\varphi[tx],\psi[(1-t)x])=$$
$$=\max\{\xi(\varphi[tx]),\ \xi(\psi[(1-t)x])\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{t\in[0,1]}\max\{\xi(\varphi[tx]),\ \xi(\psi[(1-t)x])\}=$$
$$=\inf_{t\in[0,1]}\max\{||\varphi\,;tx||,||\psi\,;(1-t)x||\}=\mu_0(||\varphi||,||\psi||x).$$

Afirmaţia este astfel demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

7.2. Topologia spaţiilor normate probabiliste

Fie $\mathscr{L}$ un spaţiu normat probabilist şi $\{||\varphi;\ x\ ||\}$ norma sa. Sistemul de mulţimi

$$U_{\varepsilon,\delta} = \{\varphi,\ \varphi \in \mathscr{L}\ ;\ ||\varphi\ ;\ \delta|| < \varepsilon\}$$

constituie o bază pentru topologia spaţiului normat probabilist $\mathscr{L}$.

Putem demonstra:

TEOREMA 7.6. Spaţiul normat probabilist $\mathscr{L}$ este izomorf topologic cu spaţiul topologic numărabil normat prin aplicaţia identică.

Demonstraţie. Cum o bază pentru topologia spaţiului numărabil normat $\mathscr{L}$ este sistemul de mulţimi

$$\{\varphi, ||\varphi||_n < \delta, \delta > 0\}$$

să luăm o vecinătate de această formă şi să arătăm că conţine o vecinătate de tipul $U_{\varepsilon,\varsigma}$. Să considerăm pentru aceasta $U_{\xi(n),\ \delta}$ şi fie $\psi \in U_{\xi(n),\delta}$ de unde rezultă că $||\psi,\ \delta|| = \xi(\psi[\delta]) < \xi(n)$ şi deci $\psi[\delta] > n$. De aici rezultă că una din afirmaţiile următoare este adevărată: sau $\psi(\delta) = \infty$ de unde rezultă că pentru orice n avem $||\psi||_n < \delta$, sau $\min\{m,\ ||\varphi||_m \geqslant \delta\} > n$ de unde rezultă de asemenea că $||\psi||_n < \delta$. Deci avem relaţia $U_{\xi(n),\ \delta} \subset \{\psi,\ ||\psi||_n < \delta_\varepsilon\}$.

Fie acum o vecinătate a spaţiului normat probabilist, cu $U_{\varepsilon,\delta}$ şi să alegem n astfel ca $\xi(n) < \varepsilon$ (n întreg). În acest caz avem relaţia

$$\{\varphi,\ ||\varphi||_n < \delta\} \subset U_{\varepsilon,\ \delta}.$$

În adevăr dacă avem relaţia $||\varphi||_n < \delta$, deducem că $\varphi[\delta] = \min\{m, ||\varphi||_n \geqslant \delta\} > n$ şi deci $\varphi[\delta] < \infty$. De aici rezultă că

$$||\varphi\ ;\ \delta|| = \xi(\varphi\ [\delta]) < \xi(n) < \varepsilon.$$

Dacă $\varphi[\delta] = \infty$, atunci

$$||\varphi\ ;\ \delta|| = \xi(\varphi\ [\delta]) = \xi(\infty) = 0$$

şi incluziunea de mai înainte este demonstrată şi cu aceasta teorema.

Vom da acum două exemple de spaţii numărabil normate.

Scanned with OKEN Scanner

EXEMPLUL 7.7. Spațiul S al tuturor șirurilor.

Orice element $s \in S$ este de forma $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$. Dacă τ este o variabilă aleatoare care are funcția de repartiție continuă și concentrată pe R_+ și $P(\omega, \tau(\omega) > n) > 0$ oricare ar fi n, să punem

$$||s;\ x|| = P\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant \tau} |s_i| \geqslant x\right).$$

Astfel spațiul S devine un spațiu normat probabilist.

EXEMPLUL 7.8. Spațiul $C_{(0,\infty)}$ al funcțiilor continue pe R_+. Dacă r este ca în exemplul 7.7, să punem pentru $\varphi \in C[0, \infty)$

$$||\varphi; x|| = P\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |\varphi(t)| \geqslant x\right)$$

și spațiul numărabil normat $C_{[0,\infty)}$ devine ur spațiu normat probabilist.

7.3. Clase speciale de spații normate probabiliste

Vom defini acum cîteva clase de spații normate probabiliste care corespund unor clase binecunoscute în teoria spațiilor normate.

DEFINIȚIA 7.9. Un spațiu normat probabilist $\mathscr{L}$ se spune că este separabil dacă există o mulțime numărabilă densă $\{x_n\} \subset \mathscr{L}$.

DEFINIȚIA 7.10 O mulțime de elemente $\{e_n\}_1^\infty$ ale spațiului normat probabilist $\mathscr{L}$ se spune că este o bază dacă orice element $x \in \mathscr{L}$ se poate scrie în mod unic sub forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

DEFINIȚIA 7.11. O bază $\{e_n\}$ a unui spațiu normat probabilist $\mathscr{L}$ se spune că este monotonă (majorantă) dacă oricare ar fi n avem

$$\left|\left| \sum_{1}^{n} \lambda_i e_i\ ;\ x \right|\right| \leqslant \left|\left| \sum_{1}^{n+1} \lambda_i\ e_i\ ;\ x \right|\right|$$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 7.12. O bază $\{e_n\}$ se va numi minorantă dacă pentru orice $x \in \mathscr{L}$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ avem

$$\left|\left| \sum_{n}^{\infty} \lambda_i e_i ; x \right|\right| \geqslant \left|\left| \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i e_i ; x \right|\right|.$$

O legătură între spațiile normate probabiliste cu bază și cele normate probabiliste care sînt separabile este dată în:

TEOREMA 7.13. Orice spațiu normat probabilist cu bază este separabil.

Demonstrație. Să considerăm pentru orice p întreg fixat mulțimea A_p a tuturor elementelor de forma $\sum_{i=1}^{p} r_i e_i$ cu r_i numere raționale. Evident că A_p este numărabilă și deci mulțimea $A = \bigcup_p A_p$ este tot numărabilă. Fie deci x de forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i.$$

Pentru orice p fix să alegem numerele raționale $r_i^{(p)}$ astfel ca

$$\left| \lambda_n - r_n^{(p)} \right| < \frac{1}{p^2 k},$$

unde k este o constantă care va fi determinată.

Să considerăm elementul $x_p = \sum_{i=1}^{p} r_i^{(p)} e_i$. Vom avea că

1. $$x_p \in A_p,$$

2. $$\left|\left| x_p - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, t \right|\right| = \left|\left| \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - r_i^p) e_i, t \right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\left|\left| e_1 ; \frac{t}{\lambda_1 - r_1^p}, \left|\left| \left(\sum_{2}^{p} (\lambda_i - r_i^p) e_i, t \right|\right| \right)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left|\left| e_1, \frac{t}{|\lambda_1 - r_1^p|}, \mu\left(\left|\left| e_2, \frac{t}{|\lambda_2 - r_2^p|}, \left|\left| \sum_{3}^{p} (\lambda_i - r_i^p) e_i, t \right|\right| \right)\right)\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

și continuînd în acest mod facem apoi $p \to \infty$ și obținem că A este densă în spațiu.

Se pune problema existenței bazelor introduse mai înainte. Un mod de a construi aceste baze ar fi să punem

$$||x, t|| = \sup_n \left\| \sum_1^n {}_i\, e_i,\ t \right\|$$

și să arătăm că această normă induce aceeași topologie pe spațiu. Similar pentru celălalt tip de normă punem

$$||x, t|| = \sup_n \left\| \sum_{n+1}^{\infty} {}_i\, e_i,\ t \right\|$$

unde x are forma $\sum_1^{\infty} \lambda_i e_i$.

7.4. Dualul unui spațiu normat probabilist

Fie $\mathscr{L}$ un spațiu normat probabilist și

$$\varphi \to ||\varphi\,;\, x||$$

norma sa probabilistă.

DEFINIȚIA 7.14. O funcțională liniară și continuă pe $\mathscr{L}$ se spune că este un element al dualului $\mathscr{L}^*$ al spațiului $\mathscr{L}$.

Vom presupune în cele ce urmează că $\mathscr{L}^*$ separă punctele lui $\mathscr{L}$. Are loc:

TEOREMA 7.15. $\mathscr{L}^*$ poate fi înzestrat cu o structură de spațiu normat probabilist.

Demonstrație. Pentru orice $\varphi^* \in \mathscr{L}^*$ să definim

$$\|\varphi^*,\ x\| = \inf \left\| \varphi\,;\ \frac{x}{\varphi^*\ (\varphi)} \right\|$$

unde inf se ia după toți $\varphi \in \mathscr{L}$ astfel ca

$$\|\varphi\,;\ x\| \geqslant \varepsilon\,(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{unde } \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Proprietatea 1 a normei probabiliste rezultă din presupunerea că $\mathscr{L}^*$ separă punctele lui $\mathscr{L}$. A doua proprietate rezultă din definiția normei probabiliste. Să arătăm că are loc și proprietatea a treia. În adevăr, fie φ^*, ψ^* elemente în $\mathscr{L}.^*$ Pentru orice $\varphi \in \mathscr{L}$ avem

$$\left\| \varphi ; \frac{x}{|\varphi^*(\varphi) + \varphi^*(\varphi)|} \right\| = \| \varphi^*(\varphi) + \psi^*(\varphi) ; x \| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(\| \varphi^*(\varphi) ; x \|, \| \psi^*(\varphi) ; x \|) =$$

$$= \mu\left(\left\| \varphi ; \frac{x}{|\varphi^*(\varphi)|} \right\| \cdot \left\| \varphi ; \frac{x}{|\psi^*(\varphi)|} \right\| \right).$$

Dacă luăm inf, obținem relația

$$\| \varphi^* + \psi^*, x \| \leqslant \mu(\| \varphi^*, x \|, \| \psi^*, x \|)$$

și teorema este demonstrată.

De asemenea putem demonstra:

TEOREMA 7.16. Fie $\mathscr{L}_1$ și $\mathscr{L}_2$ două spații normate probabiliste și $\mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ spațiul liniar al funcțiilor liniare și continue definite pe $\mathscr{L}_1$ cu valori în $\mathscr{L}_2$. În acest caz $\mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ poate fi înzestrat cu o structură de spațiu normat probabilist.

Demonstrația făcîndu-se aproape exact ca la teorema de mai sus, o vom omite.

REMARCĂ. Spațiul $\mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ poate fi înzestrat cu o structură de algebră și în acest caz apare necesitatea de a studia structurile algebrice înzestrate cu norme probabiliste.

De asemenea este naturală următoarea problemă: fie $\mathscr{L}_0$ un subspațiu al spațiului normat probabilist $\mathscr{L}$ și $f \in \mathscr{L}_0^*$. Există în acest caz $F \in \mathscr{L}^*$ astfel ca oricare ar fi $\varphi \in \mathscr{L}_0$ să avem:

1. $F(\varphi) = f(\varphi)$,
2. $\| f, x \| = \| F, x \|$

oricare ar fi $x \in R$?

7.5. Elemente de cea mai bună aproximație în spații normate probabiliste

Este cunoscută în teoria spațiilor normate problema celei mai bune aproximații; în cele ce urmează studiem analogul acestei probleme în cadrul spațiilor normate probabiliste.

Vom da mai întîi un exemplu care arată utilitatea punerii unei astfel de probleme.

Să presupunem că avem un proces stochastic cu traiectorii continue $\{\varphi(t)\}_{t\geqslant 0}$ și să presupunem că $\varphi_0(t)$ este o realizare a procesului, iar $\{\varphi_i\}_1^n$ sînt funcții continue din spațiu $C_{(0,\infty)}$ presupuse liniar independente. Se pune problema găsirii constantelor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel ca pentru fiecare $x > 0$

$$\max_{0\leqslant t<\tau} |\varphi_0(t) - \overline{\sum c_k c_k \varphi_k(t)}| \geqslant 0$$

să aibă probabilitatea minimă. Această problemă poate fi formulată în limbajul spațiilor normate probabiliste (în cazul nostru în spațiul normat probabilist construit cu ajutorul spațiului numărabil normat $C_{(0,\infty)}$) ca fiind problema minimizării normei probabiliste

$$\| \varphi_0 - \sum \overline{c_k \varphi_k}, \|$$

în spațiul corespunzător.

Vom formula acum problema celei mai bune aproximații.

PROBLEMA I. Dacă $\mathscr{L}$ este un spațiu normat probabilist și φ_0 un element arbitrar în $\mathscr{L}$, iar $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ un sistem de elemente liniar independente. Prin $\mathscr{F}$ vom nota mulțimea

$$\{\| \varphi_0 - \sum c_k \varphi_k \|, \; c_k \in K\}$$

și problema celei mai bune aproximări constă în găsirea unui element minimal în această mulțime (submulțime a lui S_1 față de relația de ordine din B). Prin definiție elementul $\sum c_k \varphi_k$ realizînd minimul va fi numit polinom de cea mai bună aproximație pentru elementul φ_0. În general, nu în mod necesar mulțimea polinoamelor de cea mai bună aproximație se reduce la un punct și vom nota această mulțime cu $\mathscr{F}_{min}$.

Vom menționa că problema, dată mai sus, sugerează și un alt aspect al teoriei celei mai bune aproximații. Să presupunem că avem

funcţiile $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ şi că orice φ care aparţine înfăşurătorii liniare a acestei mulţimi satisface relaţiile:

$$1) \int_0^\infty t\,\mathrm{d}\,P(\max_{0\leqslant s\leqslant \tau} |\varphi(s)| < t) < \infty,$$

$$2) \quad \sigma^2(\|\varphi(t)\|) = \int_0^\infty [z - M(\|\varphi(t)\|)^2\,\mathrm{d}P(\max_{0\leqslant t\leqslant \tau} |\varphi(t)| < z) < \infty$$

şi astfel apare în mod natural problema găsirii constantelor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel ca $\sigma^2(\|\varphi_0 - \sum c_k \varphi_k\|)$ să fie minim (în sensul relaţiei de ordine din B).

DEFINIŢIA 7.17. Prin definiţie valoarea medie a normei probabiliste este numărul

$$M(\|\varphi\|) = \int_0^\infty \|\varphi; z\|\,\mathrm{d}z,$$

iar dispersia normei probabiliste numărul

$$\sigma^2(\|\varphi\|) = \int_0^\infty [z - M(\|\varphi\|)^2\,\mathrm{d}(1 - \|\varphi; z\|) =$$

$$= 2\int_0^\infty z\|\varphi; z\|\,\mathrm{d}z + \left[\int_0^\infty \|\varphi; z\|\,\mathrm{d}z\right]^2.$$

Acum putem formula a doua variantă a problemei celei mai bune aproximaţii.

PROBLEMA II. Să presupunem că avem spaţiul normat probabilist $\mathscr{L}$ şi $\varphi_0 \in \mathscr{L}$ arbitrar, un sistem de elemente $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ din $\mathscr{L}$ liniar independente, iar pentru orice $\varphi \in \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ = spaţiul liniar generat de elementele $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, există integrala $\int_0^\infty z\,\|\varphi : z\|\,\mathrm{d}z$. Să se găsească constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel ca $\sigma^2(\|\varphi_0 - \sum c_k \varphi_k\|)$ să fie minim.

Un element care realizează minimul va fi numit de cea mai bună aproximaţie.

Putem demonstra următoarea teoremă care arată o legătură între cele două probleme puse mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 7.18. Orice σ^2-polinom de cea mai bună aproximație pentru elementul φ_0 este și element de cea mai bună aproximație în sensul problemei I.

Demonstrație. Fie polinomul de forma $\Sigma\, c_k^0\, \varphi_k$ avînd proprietatea că

$$\sigma^2\,(||\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k||) = \inf_{c_k} \sigma^2\,(||\varphi_0 - \Sigma\, c_k\, \varphi_k||)$$

și să presupunem că nu este polinom de cea mai bună aproximație în sensul problemei I. Există deci polinomul $\Sigma\, c_k' \varphi_k$ astfel ca

$$|\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k'\, \varphi_k\,||\leqslant ||\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k||$$

și pentru (cel puțin) un anume x_1 avem

$$||\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k'\, \varphi_k;\ x_1\,|| < ||\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k;\, x_1||.$$

Cum funcțiile din B sînt continue la stînga rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $x_2 < x_1$ cu proprietatea că

$$\varepsilon + ||\varphi_0 - \Sigma\, c_k'\, \varphi_k;\ x_2\,|| < ||\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k;\, x_1||$$

și deci utilizînd relațiile de mai sus obținem că

$$\sigma^2(||\varphi_0 - \Sigma c_k'\, \varphi_k||) = 2\int_0^{x_2} z||\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k'\, \varphi_k;\ z\,||\,\mathrm{d}z + 2\int_{x_2}^{x_1} ||\varphi_0 -$$

$$- \Sigma\, c_k'\, \varphi_k;\, z\,||\mathrm{d}z + 2\int_{x_1}^{\infty} z||\varphi_0 - \Sigma\, c_k'\, \varphi_k;z\,||\,\mathrm{d}z + \left[\int_0^{\infty} ||\varphi_0 -\right.$$

$$\left. - \Sigma\, c_k'\, \varphi_k;\ z\,||\,\mathrm{d}z\right]^2 \leqslant 2\int_0^{x_2} z\,||\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k\ ;\, z\,||\mathrm{d}z + 2\left(\int_{x_2}^{x_1} (||\varphi_0 -\right.$$

$$\left. - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k;\, z||\, - \varepsilon\right) z\mathrm{d}z + \int_{x_1}^{\infty} z||\,\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k;\, z||\mathrm{d}z + \left[\int_0^{\infty} ||\,\varphi_0 -\right.$$

$$\left. - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k\,||\,\mathrm{d}z\right]^2 = \sigma^2\,(||\varphi_0 - \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k||) - \varepsilon\,(a_1^2 - a_2^2) < \sigma^2(||\,\varphi_0 -$$

$$- \Sigma\, c_k^0\, \varphi_k\,||).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta contrazice faptul că $\Sigma c_k^0 \varphi_k$ este σ^2-polinom de cea mai bună aproximație în sensul problemei II. Teorema este demonstrată.

Vom da acum o teoremă care arată legătura între problema celei mai bune aproximații în spații normate și problema II considerată în același spațiu, dar înzestrat cu structură de spațiu normat probabilist în modul indicat mai înainte.

TEOREMA 7.19. Dacă $\mathscr{L}$ este un spațiu normat cu norma

$$\varphi \to ||\varphi||$$

și $\mathscr{L}$ este considerat cu norma probabilistă

$$\varphi \to ||\varphi\ ;\ x||,$$

iar $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sînt elemente cu proprietatea că $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sînt liniar independente, atunci problema celei mai bune aproximări este echivalentă cu problema II.

Demonstrație. Să presupunem că $\Sigma c_k^0 \varphi_k$ este polinomul de cea mai bună aproximație în sensul normei, adică

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k|| = \inf_{c_k} ||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k||.$$

În acest caz $||\ \varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k\ ;\ x\ || \in \mathscr{F}_{min}$. Să presupunem acum că avem un polinom $\Sigma c_k \varphi_k$ arbitrar și x un număr real. Sînt posibile următoarele situații :

1°. $x \leqslant ||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k||$,

2°. $x > ||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_s||$.

Cum $\Sigma c_k^0 \varphi_k$ este un polinom de cea mai bună aproximație în sensul normei spațiului avem evident

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k\ || \leqslant || \varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k\ ||$$

și deci în cazul 1°

$$x \leqslant || \varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k\ || \leqslant ||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k||$$

de unde rezultă că

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x|| = 1 = ||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k ; x||.$$

În cazul 2°

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x|| = 0 \leqslant ||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k ; x||,$$

de unde rezultă că oricare ar fi $x \in R$ avem

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x|| \leqslant ||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k, x||$$

care ne dă că

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x|| \in \mathscr{F}_{min}.$$

Să presupunem acum că

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x|| \in \mathscr{F}_{min}$$

și deci există un polinom $\Sigma c_s \varphi_k$ astfel ca

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k|| < ||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k|| = x_0$$

(adică $\Sigma c_k^0 \varphi_k$ nu este polinom de cea mai bună aproximație în sensul normei spațiului). Din definiția normei probabiliste deducem că oricare ar fi φ_1 $||\varphi|| = \sup \{x, ||\varphi, x|| = 1\}$ de unde rezultă că

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k \varphi_k ; x_0|| = 0 < 1 = ||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x_0||.$$

Fie

$$B_0 = \{ \xi, \ \xi \in B, \ \xi(x) = 1 + \xi \ (x + 0)$$

pentru un anumit $x \in R$ care este total ordonată și relația de mai sus arată că

$$||\varphi_0 - \Sigma c_k^0 \varphi_k ; x|| \in \mathscr{F}_{min}$$

și în acest mod echivalența celor două probleme este demonstrată, deoarece avem și

$$\sigma^2 (||\varphi||) = 2\int_0^{||\varphi||} z dz + \left[\int_0^{||\varphi||} dz\right]^2 = 2 ||\varphi||^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cele de mai sus am expus unele rezultate privind problema celei mai bune aproximații fără să demonstrăm existența elementului care realizează cea mai bună aproximație în sensul problemelor I sau II. În cele ce urmează vom da cîteva rezultate privind acest aspect al problemei celei mai bune aproximații.

Are loc:

TEOREMA 7.20. Dacă $\mathscr{L}$ este un spațiu normat probabilist și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este un sistem de elemente liniar independente atunci oricare ar fi $\varphi \in \mathscr{L}$ există un polinom de cea mai bună aproximație $\Sigma c_k^0 \varphi_k$ în sensul problemei I pentru elementul φ.

Demonstrație. Să considerăm $\Gamma = \{ c = (c_1, \ldots, c_n)\}$ și să introducem o relație de ordine parțială $c < \tilde{c}$, dacă și numai dacă

$$||\varphi - \Sigma c_k \varphi_k|| < ||\varphi - \Sigma \tilde{c}_k \varphi_k||.$$

Să arătăm că mulțimii Γ i se poate aplica lema lui Zorn. Să considerăm pentru aceasta $\delta = \{s\}$ o familie total ordonată de elemente din Γ și să definim

$$F(x) = \inf_{s \in S} ||\varphi - \Sigma c_k^s \varphi_k ; x||.$$

În acest caz există $\{s_n\}$ astfel ca

$$\lim ||\varphi - \Sigma c_k^{s_i} \varphi_k ; x|| = F(x),$$

oricare ar fi punctul x de continuitate al funcției $F(x)$. Să punem

$$X' = [0, \infty) \cap \{x, F(x-0) = F(x+0)\}$$

și să considerăm o submulțime numărabilă $X'' = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ densă în X'. Pentru fiecare $x \in_i X''$ există un șir de elemente $\{s_k^i\}$ astfel ca

$$F(x_i) = \lim ||\varphi - \Sigma c_k^{s_k^i} \varphi_k ; x_i||.$$

Să punem $s_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} s_j^i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ care are sens deoarece S este total ordonată. Să arătăm că are loc relația

$$\text{mil} ||\varphi - \Sigma c_k^{s_i} \varphi_k ; x|| = F(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ și $x' \in X''$ există $x_p \in X''$, $x_p \leqslant x$ astfel ca

$$0 \leqslant F(x_p) - F(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din definiția șirului $\{x_i\}$ rezultă că există $m_0 > p$ astfel ca

$$\| \varphi_0 - \sum c_k^{s_p^m} \varphi_k ; \; x_p \| - F(x_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \; m > m_0.$$

Dar atunci, dacă $m > m_0$ pentru $m_0 > p$

$$0 \leqslant \| \varphi - \sum c_k^{s_m} \varphi_k ; x \| - F(x) \leqslant \| \varphi - \sum c_k^{s_m} \varphi_k ; x_p \| - F(x) \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi - \sum c_k^{s_p^m} \varphi_k ; x \| - F(x_p) + F(x_p) - F(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

și relația de mai sus este demonstrată.

De asemenea avem că

$$\sup_{1 \leqslant m < \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} | c_k^{s_m} | < \infty$$

și că mulțimea $\left\{ \varphi - \sum c_k^{s_m} \varphi_k \right\}_{m=1}^{\infty}$ este o mulțime mărginită, adică există o funcție $\widetilde{\varphi} \in B$ astfel ca

$$\| \varphi - \sum c_k^{s_m} \varphi_k ; \; x \| \leqslant \widetilde{\varphi}$$

deoarece putem lua drept $\widetilde{\varphi}$ funcția $\| \varphi - \sum c_k^{s_1} \varphi_k ; x \|$.

Pentru a demonstra teorema vom remarca faptul că spațiul generat de elementele $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este izomorf topologic cu spațiul R_{n+1} (C_{n+1} respectiv) și cum în orice spațiu finit-dimensional mulțimile mărginite sînt relativ compacte rezultă că putem găsi un subșir $\{c^{s_{m_p}}\}$ care converge către $c^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)$, $c_k^{s_{m_p}} \to c_k^0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ astfel încît

$$\lim_{p \to \infty} \| \varphi - \sum c_k^{s_{m_p}} \varphi_k ; \; x \| = F(x)$$

şi

$$\lim_{p\to\infty} \| \varphi - \sum c_k^{mp} \varphi_k ; x \| = \| \varphi - \sum c_k^0 \varphi_k ; x \|,$$

de unde rezultă că avem relaţia $F(x) = \| \varphi - \sum c_k^0 \varphi_k ; x \|$. Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă dă un criteriu de existenţă a polinomului de cea mai bună aproximare în sensul problemei II.

TEOREMA 7.21. Fie $\mathscr{L}$ un spaţiu normat probabilist şi $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ un sistem de elemente din $\mathscr{L}$ astfel ca $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ să fie un sistem de elemente liniar independente, iar pentru orice $\varphi \in \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ există integrala

$$\int_0^\infty z \| \varphi ; z \| \, dz < \infty.$$

În acest caz există σ^2-polinomul de cea mai bună aproximaţie pentru elementul φ_0.

Demonstraţie. Fie $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ cu $c_i \in K$ şi să considerăm

$$\sigma_i^2 = 2\int_0^\infty z \| \varphi_0 - \sum c_k \varphi_k ; z \| \, dz + \left[\int_0^\infty \| \varphi_0 - \sum c_k \varphi_k ; z \| \, dz\right]^2$$

de unde deducem că există $E = \inf_i \{\sigma_i^2\}$, adică există $c_m = (c_1^m, c_2^m, \ldots, c_n^m)$ cu proprietatea că

$$E = \lim_{m\to\infty} \sigma_{c_m}^2.$$

Să remarcăm şi faptul că $\{\varphi_0 - \sum c_k^m \varphi_k\}_1^\infty$ este o mulţime mărginită în $\mathscr{L}$. În adevăr, dacă nu ar fi aşa ar exista vecinătatea $U_{\varepsilon,\delta}$ şi pentru orice p, avem $\frac{1}{p}(\varphi_0 - \sum c_k^{mp} \varphi_k) \notin U_{\varepsilon,\delta}$. Aceasta se mai scrie şi astfel

$$\| \varphi_0 - \sum c_k^{mp} \varphi_k ; \delta_p \| > \varepsilon,$$

de unde deducem că

$$\sigma_{c^{mp}}^2 \geqslant \left[\int_0^\infty \| \varphi_0 - \sum c_k^{mp} \varphi_k ; z \| \, dz\right]^2 \geqslant \left|\int_0^{\delta_p} \| \varphi_0 - \sum c_k^{mp} \varphi_k ; z \| \, dz\right]^2 \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon^2 \delta^2 p$$

Scanned with OKEN Scanner

care ne dă, o contradicție deoarece $p \to \infty$, și afirmația este demonstrată. Rezultă că

$$\sup_{1 \leqslant m < \infty} \max |c_k^m| < M$$

și deci putem presupune că există $c_0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0) = \lim c_k^{m_q}$ și $\sigma^2_{c^{m_q}} \to E$. Dar în acest caz avem și

$$|| \varphi_0 - \sum c_k^{m_q} \varphi_k ; z || \to || \varphi_0 - \sum c_k^0 \varphi_k ; z ||.$$

Din proprietatea funcției triunghiulare deducem că

$$F_q(z) = || \varphi_0 - \sum c_k^{m_q} \varphi_k ; z || \leqslant \left|\left| \varphi_0 ; \frac{z}{n+1} \right|\right| +$$

$$+ \sum_1^n \left|\left| \varphi_j ; \frac{z}{M(n+1)} \right|\right| = F(z)$$

$$G_q(z) = z \, || \varphi_0 - \sum c_k^{m_q} \varphi_k ; z \, || = z F_q(z) \leqslant z F(z),$$

oricare ar fi $q = 1, 2, 3, \ldots$ Din teorema lui Lebesgue avem

$$\sigma^2_{c_0} = \sigma^2(|| \varphi_0 - \sum c_k^0 \varphi_k ||) = \lim \sigma^2_{c^{m_q}} = E$$

și teorema este demonstrată.

O problemă naturală care apare în teoria celei mai bune aproximații este și problema unicității, adică a existenței unui singur polinom de cea mai bună aproximație pentru fiecare element.

Așa după cum este cunoscut, chiar în cazul spațiilor normate există cazuri cînd polinomul nu este unic. Există o clasă de spații normate în care unicitatea polinomului de cea mai bună aproximație este adevărată. Aceasta este clasa spațiilor strict normate : un spațiu este strict normat dacă din

$$|| x + y || = || x || + || y ||$$

rezultă că există $\lambda \in K$, astfel ca $x = \lambda y$ (chiar $\lambda \geqslant 0$).

Se arată ușor că polinomul de cea mai bună aproximație în astfel de spații este unic. Vom introduce acum o clasă de spații normate probabiliste pentru care polinomul de cea mai bună aproximație în sensul problemei I este unic.

Scanned with OKEN Scanner

Vom demonstra mai întîi următoarea:

TEOREMA 7.22. În orice spațiu normat probabilist, mulțimea polinoamelor de cea mai bună aproximație (în sensul problemei I) pentru orice element fix φ_0 și sistem de elemente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ este convexă.

Demonstrație. Fie p_1 și p_2 două polinoame care sînt de cea mai bună aproximație pentru elementul φ_0. Deci

$$p_1 = \sum c_k^1 p_k,\ p_2 = \sum c_k^2 p_k$$

și

$$\| \varphi_0 - p_1; x\| = \| \varphi_0 - p_2; x\| \in \mathscr{F}_{min}.$$

În acest caz, oricare ar fi $t \in (0, 1)$ avem

$$\| \varphi_0 - [tp_1 + (1-t)\, p_2]; x\| = \| t(\varphi_0 - p_1) + (1-t)\,(\varphi_0 - p_2);$$

$$x\| \leqslant \max \{ \| t\,(\varphi_0 - p_1); tx\|, \| (1-t)\,(\varphi_0 - p_2);\ (1-t)x\| \} =$$

$$= \max \{ \| \varphi_0 - p_1; x\|,\ \| \varphi_0 - p_2; x\| \} = \| \varphi_0 - p_1; x\|$$

și deci $\| \varphi_0 - [tp_1 + (1-t)\, p_2],\ x\| \in \mathscr{F}_{min}$; teorema este astfel demonstrată.

Clasa de spații în care are loc unicitatea polinomului de cea mai bună aproximație în sensul problemei I este dată în:

DEFINIȚIA 7.23. Un spațiu normat probabilist se spune că are o normă strictă dacă

$$\| \varphi + \psi\| = \mu_0 (\| \varphi\|, \| \psi\|)$$

atunci și numai atunci cînd $\varphi = \lambda\varphi$ cu $\lambda \geqslant 0$.
Are loc:

TEOREMA 7.24. Într-un spațiu normat probabilist cu normă strictă polinomul de cea mai bună aproximație în sensul problemei I este unic.

Demonstrație. Fie deci $\mathscr{L}$ un spațiu normat probabilist ca în teoremă, iar $\varphi_0 \in \mathscr{L}$ arbitrar și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{L}$ cu p_1 și p_2 două polinoame de

cea mai bună aproximație. Cum mulțimea elementelor de cea mai bună aproximație este convexă, deducem că $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ este un polinom de cea mai bună aproximație și avem

$$\|(\varphi_0 - p_1) + (\varphi_0 - p_2)\| = \mu_0(\varphi_0 - p_1\|, \|\varphi_0 - p_2\|)$$

de unde rezultă că

$$\varphi_0 - p_1 = \lambda(\varphi_0 - p_2)$$

care ne dă, în virtutea presupunerii că φ_0 este liniar independent de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ că $\lambda = 1$ și deci $p_1 = p_2$.

Dacă φ_0 este liniar dependent de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ afirmația este trivial adevărată.

Vom remarca faptul că în spații normate probabiliste se poate introduce noțiunea de sistem cebîșevian de elemente: un sistem liniar independent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se spune cebîșevian dacă pentru orice $\varphi_0 \in \mathscr{L}$ polinomul de cea mai bună aproximație în raport cu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este unic. Cu această terminologie rezultatul din teorema de mai sus poate fi formulat și astfel: într-un spațiu normat probabilist cu normă strictă, orice sistem finit de elemente liniar independente este cebîșevian.

Vom menționa acum cîteva probleme care prezintă interes și anume:

1) Este adevărată o teoremă de tip Mazur-Banach privind spațiile normate probabiliste separabile?

2) Este adevărată o teoremă de tip Krein-Milman privind mulțimile convexe?

3) Spațiul $\mathscr{L}$ se poate scufunda „izometric" în $\mathscr{L}^{**}$ (dualul spațiului $\mathscr{L}^*$)?

4) Teoremele de bază ale analizei funcționale liniare sînt adevărate în spații normate probabiliste?

7.6. Spații local convexe probabiliste

Este cunoscut că spațiile normate admit o generalizare foarte utilă și această generalizare o constituie spațiile local convexe.

Scopul nostru este de a introduce și a da unele proprietăți ale spațiilor local convexe probabiliste.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 7.25. Un spațiu liniar $\mathscr{L}$ se spune că este un spațiu probabilist local convex dacă există o familie de aplicații

$$f_\tau : \mathscr{L} \to B,$$

numite și seminorme probabiliste având următoarele proprietăți:

1) $f_\tau(p) = \Delta, \forall \tau \Rightarrow \varphi = \emptyset$,

2) $f_\tau(a\,\varphi)(x) = f_\tau(\varphi)\left(\frac{x}{|a|}\right), \quad a \in K,$

3) $f_\tau(\varphi + \psi) \leqslant \mu(f_\tau(\varphi), f_\tau(\psi))$,

unde μ este o funcție triunghiulară (relativă la o submulțime a lui B).

Vom nota, exact ca la spațiile normate probabiliste

$$f_\tau(\varphi)(x) = \|\varphi; x\|_\tau$$

DEFINIȚIA 7.26. Dacă mulțimea de indici τ este numărabilă și

$$f_{\tau i}(x, t) \leqslant f_{\tau i+1}(x, t),$$

vom spune că avem o familie monotonă de seminorme probabiliste.

Are loc:

TEOREMA 7.27. Pentru orice familie numărabilă de seminorme probabiliste $\{f_{\tau i}\}$ există o familie echivalentă care este și monotonă.

Demonstrație. Pentru orice n să punem

$$\|\varphi, t\|_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} f_{\tau i}(\varphi, t)$$

care satisface toate proprietățile cerute.

Scanned with OKEN Scanner

8 Puncte fixe și spații metrice probabiliste

Este cunoscut că rezolvarea unor probleme se reduce la studiul punctelor fixe ale unor transformări definite pe anumite spații topologice. O teoremă celebră, formulată pentru anumite spații particulare de Picard și apoi de Kelogl și Birkhoff și în formă abstractă de către Banach, este teorema privind punctele fixe ale aplicațiilor contracții, definite pe spații metrice (complete). De asemenea, este cunoscut că s-au obținut diferite extensii ale acestei teoreme la clase mai generale de aplicații.

Scopul nostru este de a da extensia teoremei privind aplicațiile contracțiilor în cazul spațiilor metrice probabiliste. De asemenea, vor fi expuse extensii ale acestui concept pentru perechi de contracții.

8.1. Contracții în spații metrice probabiliste

Fie (S, F) un spațiu metric probabilist de tip Menger sau un spațiu metric probabilist în care F satisface proprietățile:

1) $\lim_{x \to \infty} F_{p,q}(x) = 1 \quad \forall\, p, q \in S$,

2) $F_{p,q} = H$ dacă și numai dacă $p = q$,

3) $F_{p,q} = F_{q,p}$,

4) IV_s, $F_{p,r} \geqslant \tau(F_{p,q}, F_{q,r}) \quad \forall\, p, q, r \in S$ (8.1.1)

Aplicația $\tau : \Delta \times \Delta \to \Delta$ este definită astfel: fie T o t-normă și F, G în Δ; atunci

Scanned with OKEN Scanner

$$\tau\,(F, G)(x) = \sup\{T(F)(\alpha x)\,,\ G(\beta x)),\ \alpha + \beta = 1\}\,.$$

Noi presupunem că T este continuă la stînga.

Noţiunea de contracţie în spaţii metrice probabiliste a fost introdusă de V. Schgal care a arătat că pentru astfel de aplicaţii există cel mult un punct fix.

DEFINIŢIA 8.1. Fie (S, F) un spaţiu metric probabilist de tip Menger sau care satisface relaţia (8.1.1) şi $f : S \to S$. Se spune că f este o contracţie dacă există $\alpha \in (0, 1)$ astfel ca

$$F_{f(p),\,f(q)}(x) \geqslant F_{p,q}(x/\alpha)$$

oricare ar fi $p,\ q \in S$ şi $x > 0$.

Are loc:

TEOREMA 8.2. Dacă (S, F) este un spaţiu metric probabilist ca în definiţia 8.1. şi f o contracţie, atunci există cel mult un punct p_* astfel ca $f(p_*) = p_*$.

Înainte de a începe demonstraţia acestei teoreme să dăm unele definiţii. Fie $f : S \to S$ şi să definim pentru un punct $p_0 \in S$ şirul iteratelor prin aplicaţia f astfel:

$$p_{i+1} = f(p_i)\,,\ i \geqslant 0\,,$$

iar prin $G_{p_0}(x)$ să însemnăm funcţia definită prin

$$G_{p_0}(x) = \inf\{F_{p_0,p_i}(x),\ i \text{ întreg } > 0\}$$

iar cu $\{p_i\}$ şirul iteratelor punctului p_0.

Teorema 8.2. rezultă imediat din:

TEOREMA 8.3. Dacă (S, F) este un spaţiu ca în definiţia 8.1., atunci o contracţie f: $S \to S$ sau are un punct fix, sau pentru orice $p_0 \in S$, $\sup\{G_{p_0}(x), x \text{ real}\} < 1$.

Demonstraţie. Să presupunem că pentru un $p_0 \in S$, $\sup\{G_{p_0}(x), x \text{ real}\} = 1$. Cum $\{p_i\}$ este şirul iteratelor punctului p_0, f fiind contracţie avem

$$F_{p_{i+m},p_i}(x) \geqslant F_{p_m,p_0}(x/\alpha^i) \geqslant G_{p_0}(x/\alpha^i)\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar G_{p_0} este nedescrescătoare și deci

$$\lim_{i\to\infty} F_{p_{i+m},p_i}(x) = 1,$$

oricare ar fi $x > 0$ și m. Rezultă că $\{p_i\}$ este un șir Cauchy. Cum presupunem spațiul complet, fie $p_* = \lim p_i$. Să arătăm că $f(p_*) = p_*$.

În adevăr, avem, oricare ar fi întregul i

$$F_{f(p_*),p_*}(x) \geqslant \tau(F_{f(p_*),p_i}, F_{p_i,p_*})(x) \geqslant$$

$$\geqslant \tau(F_{p_*,p_{i-1}}(j/\alpha),\ F_{p_i,p_*})(x)$$

și deci

$$F_{f(p_*),p_*}(x) \geqslant \lim_{i\to\infty} \tau(F_{p_*,p_{i-1}}(j/\alpha),\ F_{p_i,p_*})(x) \geqslant H(x) = 1$$

de unde $f(p_*) = p_*$.

Să arătăm că nu există două puncte fixe. Fie q_* un alt punct fix. Deci

$$F_{f(p_*),f(q_*)}(x) \cong \tau(F_{f(p_*),q_*}, F_{q_*,f(q_*)}) \geqslant 1$$

și afirmația este demonstrată deoarece rezultă că $f(p_*) = f(q_*) = p_* = q_*$ .. Am verificat afirmațiile din teoremă numai în cazul cînd avem relația IV_s; în cazul cînd avem un spațiu de tip Menger, adică IV_m verificarea este similară și de aceea am omis demonstrația.

Ca o consecință a teoremei stabilite putem demonstra și:

TEOREMA 8.4. Orice contracție definită pe un spațiu metric probabilist (S, F) de tip Menger cu t-norma = Min are un punct fix unic.

Demonstrație. Fie p_0 arbitrar în S și f contracție cu constanta $\alpha \in (0,1)$, iar $\{p_i\}$ șirul iteratelor punctului p_0. Cum pentru orice i avem

$$F_{p_0,p_i}(x) \geqslant F_{p_0,p_i}((1-\alpha)(1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1})) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{Min}\{F_{p_0,p_1}((1-\alpha)(x)\ F_{p_1,p_i}((1-\alpha)(\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{i-1})x)\} \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{Min} F_{p_0, p_1}((1-\alpha)(x), F_{p_1, p_2}((1-\alpha)\, x) F_{p_2, p_3}((1-\alpha)(\alpha^2+\alpha+$$
$$\{+\ldots+\alpha^{i-1})\, x)\} \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Min}\{F_{p_0, p_1}((1-\alpha)\, x), F_{p_1, p_2}((1-$$
$$-\alpha)\,\alpha\, x) \ldots F_{p_{i-1}, p_i}((1-\alpha)\,\alpha^{i-1} x)\} \geqslant F_{p_0, p_1}((1-\alpha)\, jx)$$

rezultă că

$$G_{p_0} \geqslant F_{p_0, p_1}((1-\alpha)\, j)$$

și deci

$$\sup\{G_{p_0}(x)\,;\ x \text{ real}\} = 1$$

și afirmația teoremei 8.4 rezultă din teorema 8.3.

Funcția G_{p_0} intervine în teoremele de mai sus și este o condiție locală; în teorema care urmează comportarea funcției G_{p_0} este legată de condiții globale.

TEOREMA 8.5. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist în care IV_s are loc și

$$\sup\{\tau(F, F)\,, F < H\} = H$$

iar $f: S \to S$ o contracție cu coeficientul $\alpha \in (0,1)$. În acest caz

$$\sup\{G_{p_0}(x), x \text{ real}\} = 1 \Leftrightarrow \sup\{G_{q_0}(x), x \text{ real}\} = 1$$

oricare ar fi p_0, $q_0 \in S$.

Demonstrație. Fie p_0 și $q_0 \in S$ iar

$$\sup\{G_{q_0}(x), x \text{ real}\} = 1.$$

Să notăm cu G^* funcția continuă la stînga care coincide cu G_{q_0} în toate punctele de continuitate, iar $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ iteratele prin f ale punctelor p_0 și q_0. Cum f este o contracție este evident că

$$F_{p_i, q_i} \geqslant F_{p_0, q_0}(j/\alpha^i) \geqslant F_{q_j, p_0}$$

și deci

$$F_{p_0, p_i} \geqslant \tau(F_{p_0, q_j}, (F_{q_0, q_i}, F_{q_i, p_i})) \geqslant \tau(F_{p_0, q_j}, (G^*, F_{p_0, q_0}))$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$G_{p_0} \geqslant \tau\,(F_{p_0, q_0}\,,\,(G^*, F_{p_0, q_0})).$$

Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă stabileşte existenţa punctelor fixe în cazul cînd aplicaţia F are o proprietate foarte puternică care arată că spaţiul este de fapt un spaţiu metric.

TEOREMA 8.6. Fie (S, F) un spaţiu metric probabilist complet în care IV_s este îndeplinită şi τ este funcţie continuă la stînga. Să presupunem că pentru orice $p,\ q \in S$ există $x \in R_+$ astfel ca $F_{p,q}(x) = 1$. Dacă $f : S \to S$ este o contracţie atunci f are un punct fix unic.

Demonstraţie. Pentru fiecare $p, q \in S$ să punem

$$\rho\,(p,\ q) = \inf\{x,\ F_{p,q}\,(x) = 1\}$$

care este uşor de văzut că este o metrică pe S şi f este o contracţie în spaţiul metric $(S,\ \rho)$. De asemenea este uşor de văzut că şirul iteratelor punctului p_0, $\{p_i\}$, este un şir Cauchy. De asemenea $\{p_i\}$ este un şir Cauchy în (S, F) şi deci fie $p_* = \lim p_i$ care este punct fix pentru f şi este de asemenea unic.

Teorema este demonstrată.

Pentru teorema care urmează vom reaminti noţiunea de E-spaţiu. Un spaţiu metric probabilist (S, F) este un E-spaţiu pe spaţiul metric $(S,\ \rho)$ dacă elementele lui S sînt variabile aleatoare pe spaţiul probabilist $\{\Omega,\ \mathcal{K}\ P\}$ astfel că pentru orice $p, q \in S$ avem

$$F_{p,q}\,(x) = P\,\{w,\ \rho\,(p\,(w),\ q\,(w)) < x\},$$

oricare ar fi x real (orice două puncte p şi q sînt identice dacă diferă pe mulţimi de măsură zero).

Este cunoscut (şi uşor de verificat) că $(S,\ F)$ este în acest caz un spaţiu de tip Menger pentru t-norma

$$T\,(a,\ b) = \max\{a + b - 1,0\}\,.$$

O aplicaţie $f : S \to S$ este o contracţie strictă dacă şi numai dacă există $\alpha \in (0,1)$ astfel ca

Scanned with OKEN Scanner

$$\left\{w,\ w \in \Omega,\ \rho\,(tp\,(w),\ tq(w)) < \frac{x}{\alpha}\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \{w,\ w \in \Omega\ ,\ \rho\,(tf\,(p\,(w)),\ tf\,(q\,(w))) < x\}\,.$$

Este evident că orice contracție strictă este o contracție. Putem demonstra:

TEOREMA 8.7. Orice contracție strictă pe un E-spațiu are un punct fix unic.

Demonstrație. Fie p_0 arbitrar în S și $\{p_i\}$ șirul iteratelor punctului p_0 prin contracția strictă f. În acest caz

$$\{w,\ \rho(tp_0(w), tp_m\,(w)) < x\} \supseteq \{w,\ \rho(tp_0,\ tp_1) + \ldots + \rho\,(tp_{m-1},\ tp_m) < x\} \supseteq$$

$$\supseteq \{w, (1 + \ldots + \alpha^{m-1})\,\rho(tp_0, tp_1) < x\} = \{w, (1 - \alpha^m)\ \rho(tp_0, tp_1) < (1 -$$

$$- \alpha)x\} \supseteq \{w,\ \rho\ tp_0,\ tp_1) < (1 - \alpha)\ x\}$$

de unde deducem că

$$F_{p_0, p_m} \geqslant F_{p_0, p_1}\ ((1 - \alpha)j)$$

care ne dă că $G_{p_0} \geqslant F_{p_0 p_1}\,((1 - \alpha)j)$ și deci f are un punct fix care este unic. Teorema este demonstrată.

Este cunoscut că, în cazul spațiilor metrice $(S,\ \rho)$ dacă o aplicație $f : S \times S$ are proprietatea că pentru un anumit întreg N_0, aplicația $f^{N_0} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ este o contracție, atunci punctele fixe ale celor două aplicații f și f^{N_0} sînt aceleași. Vom demonstra acum că un rezultat analog este adevărat și în cazul spațiilor metrice probabiliste.

TEOREMA 8.8. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist în care IV_m sau IV_s are loc și $f : S \times S$ o aplicație astfel ca pentru un întreg N_0, f^{N_0} este o contracție. În acest caz :

1) sau f are un punct fix ;
2) sau pentru orice p_0, $\sup\limits_x \{G_{p_0}\,(x),\ x \text{ real}\} < 1$.

Demonstrație. Să presupunem că pentru un $p_0 \in S$ avem $\sup\{G_{p_0}(x),\ x \text{ real}\} = 1$. Atunci $G_{f(p_0)}$ are proprietatea că

$$\sup\{G_{f(p_0)}(x),\ x \text{ real}\} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci f^{N_0} are un punct fix unic. Să-l notăm cu p_*. În acest caz și $f(p_*)$ este un punct fix pentru f^{N_0}, deoarece

$$f^{N_0} f(p_*) = f(f^{N_0} p_*) = f(p_*)$$

și deci trebuie să coincidă cu p_*. Teorema este astfel demonstrată.

Observație. Este ușor de văzut cum se poate generaliza această teoremă pentru aplicații care comută cu o contracție. Lăsăm acest lucru în seama cititorului.

8.2. Șiruri de aplicații și puncte fixe

Vom da acum cîteva teoreme privind șirurile de contracții definite pe un spațiu metric probabilist.

Să considerăm un spațiu metric probabilist (S, F) și un șir de aplicații $f_i : S \to S$ cu proprietatea că pentru fiecare i există $s_i \in S$ astfel încît

$$f_i(s_i) = s_i$$

și $\{f_i\}$ converge într-un anumit mod către o contracție f_0 care are un punct fix $s_0 = f_0(s_0)$. Se pune problema legăturii între șirul $\{s_i\}$ și s_0. Să dăm mai întîi:

DEFINIȚIA 8.9. Un șir de aplicații $f_n : S \to S$ definite pe spațiul metric probabilist converge uniform către f_0 dacă și numai dacă pentru orice ε, $\lambda > 0$ există $N_{\varepsilon,\lambda}$ astfel ca dacă $n > N_{\varepsilon,\lambda}$ să avem

$$F_{f_n(p), f(p)}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

oricare ar fi $p \in S$.

Are loc:

TEOREMA 8.10. Dacă $\{f_i\}$ este un șir de aplicații definite pe un spațiu metric probabilist (S, F) în care IV_s este adevărată și care converge uniform către o contracție $f_i : S \to S$ care are un punct fix unic s_0 și pentru orice i există $s_i \in S$, $f_i(s_i) = s_i$, atunci șirul $\{s_i\}$ converge în (S, F) către s_0.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că pentru orice $x > 0$

$$F_{s_n, s_0}(x) \to F_{s_0, s_0}(x) = H(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum avem, pentru $x > 0$

$$F_{s_n, s_0}(x) \geqslant \tau(F_{f_n^p(s_n), f_0^p(s_n)}, F_{f_0^p(s_n), f_0(s_0)}(x) \geqslant \tau(1-\lambda, F_{s_n, s_0}(x/\alpha^p))$$

oricare ar fi $p > 1$ și cum $\alpha \in (0,1)$ pentru p suficient de mare, deducem că are loc

$$F_{s_n, s_0}(x) \geqslant 1 - \lambda$$

dacă $n \geqslant N_{\varepsilon,\lambda}$. Dacă $x = 0$ afirmația este evidentă și teorema este complet demonstrată.

Următoarea teoremă este legată de o convergență locală.

TEOREMA 8.11. Dacă $f_i : S \to S$ este un șir de aplicații definite pe un spațiu metric probabilist în care IV_s este adevărată și pentru fiecare i există $s_i = f_i(s_i)$, iar șirul $\{f_i\}$ converge punctual către o contracție $f_0 : S \to S$, atunci existența unui subșir $\{s_{i_j}\}$ care converge către un punct $s_0 \in S$ implică faptul că s_0 este punct fix pentru f_0.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că $f_0(s_0) = s_0$. Pentru orice $x > 0$ avem

$$F_{s_{i_j}, f_0(s_0)}(x) = F_{f_{i_j}(s_{i_j}), f_0(s_0)}(x) \geqslant \tau(F_{f_{i_j}(s_{i_j}), f_{i_j}(s_0)}; f_{i_j}(s_0) f_0(s_0))(x) \geqslant$$

$$\geqslant \tau(F_{s_{i_j} f_{i_j}(s_0), f_{i_j}(s_0) f_0(s_0)})(x).$$

Cum $s_{i_j} \to s_0$ și $f_{i_j} \to f_0$, punctual rezultă că $s_{i_j} \to f_0(s_0)$ și deci $f_0(s_0) = s_0$. Teorema este demonstrată.

Vom da acum cîteva teoreme privind punctele fixe pe spații produs. Dăm mai întîi:

DEFINIȚIA 8.12. Un spațiu metric probabilist (S, F) se spune că posedă proprietatea de punct fix dacă orice aplicație continuă $f : S \to S$ are cel puțin un punct fix.

DEFINIȚIA 8.13. Fie (S_1, F_1) și (S_2, F_2) două spații metrice probabiliste de tip Menger și $(S_1 \times S_2, F_T)$, T-produsul lor iar $f : S_1 \times S_2 \to S_1 \times S_2$. Se spune că f este o contracție în prima variabilă dacă pentru orice $s_2 \in S_2$ există $\alpha_{s_2} \in (0,1)$ astfel ca

$$T(F_1, F_2)_{f(s_1, s_2), f(s_1', s_2')}(x) \geqslant T(F_1, F_2)_{(s_1, s_2)(s_1', s_2')}(x/\alpha_{s_2}).$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod similar definim contracţiile în a doua variabilă. Pentru orice $s_2 \in S_2$ definim

$$f_{s_2} : S_1 \to S_1$$

prin $f_{s_2}(s_1) = \pi_1 \circ f(s_1, s_2)$, unde π_1 este proiecţia spaţiului $S_1 \times S_2$ pe S_1. Analog definim $f_{s_1} : S_2 \to S_2$ pentru s_1 arbitrar în S_1.

Are loc:

TEOREMA 8.14. Fie (S_1, F_1) un spaţiu metric probabilist complet în care IV_m ori IV_s are loc şi să presupunem că acestea au loc în spaţiul metric probabilist complet (S_2, F_2) care posedă proprietatea de punct fix. Dacă $f : S_1 \times S_2 \to S_1 \times S_2$ este o funcţie care este contracţie în fiecare variabilă şi contracţiile corespunzătoare posedă puncte fixe atunci f are un punct fix.

Demonstraţie. Pentru $s_2 \in S_2$ să punem

$$f_{s_2}(s_1) = \pi_1 \circ f(s_1, s_2)$$

care are un punct fix s_1^2 şi să definim

$$\varphi(s_2) = s_1^2$$

care este o funcţie continuă. În acest caz însă

$$\psi(s_2) = \pi_2 \circ f(\varphi(s_2), s_2)$$

este o funcţie continuă pe S_2 şi cum (S_2, F_2) are proprietatea de punct fix, rezultă că există s_2^0 astfel ca

$$\psi(s_2^0) = \pi_2 \circ f(\varphi(s_2^0), s_2^0) = s_2^0,$$

care ne dă că punctul $(\varphi(s_2^0), s_2^0)$, este punct fix pentru f şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Teorema demonstrată este interesantă atunci cînd (S, F) este în fapt un spaţiu metric cu proprietatea de punct fix. O problemă care apare este următoarea: fie (S, ρ) un spaţiu metric cu proprietatea de punct fix şi (S, F) un spaţiu metric probabilist simplu construit cu ajutorul lui (S, ρ). Posedă (S, F), proprietatea de punct fix?

O clasă de aplicaţii care generalizează contracţiile definite pe un spaţiu metric probabilist este dată în:

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 8.15. O aplicație $f: S \to S$ unde (S, F) este un spațiu metric probabilist este contracție locală dacă pentru orice $p \in S$ există $\alpha_p \in (0,1)$ astfel încît oricare ar fi $q \in S$ avem

$$F_{f(p),f(q)}(x) \geqslant F_{p,q}(x/\alpha_p),$$

Are loc:

TEOREMA 8.16. Fie $f: S \to S$ o contracție locală definită pe un spațiu metric probabilist (S, F) și p_* un punct fix al acestei aplicații. În acest caz p_* este singurul punct fix și pentru orice $p_0 \in S$ șirul iteratelor punctului p_0 converge către p_*.

Demonstrație. În adevăr, dacă p este punct fix pentru f avem

$$F_{p_*,f^n(p_0)}(x) = F_{f^n(p_*),f^n(q_0)}(x) \geqslant F_{p_0,p_*}(x/\alpha_{p_*})$$

și cum n este arbitrar iar $\alpha_{p_*} \in (0,1)$ rezultă că

$$f^n(p_0) \to p_*.$$

Faptul că p^* este unic se demonstrează ca și în cazul contracțiilor.

8.3. Perechi contractive în spații metrice probabiliste

O altă generalizare a noțiunii de contracție se referă la perechi de aplicații și aceasta o introducem prin:

DEFINIȚIA 8.17. O pereche de aplicații $f_i: S \to S$, $i = 1, 2$ unde (S, F) este un spațiu metric probabilist în care (IV_m) sau (IV_s) este adevărată se spune că este pereche contractivă dacă există $\alpha \in (0,1)$ astfel încît oricare ar fi $p, q \in S$ să avem

$$F_{f_1(p),f_2(q)}(x) \geqslant f_{q,p}(x/\alpha).$$

Este evident că această noțiune generalizează pe cea de contracție. Problema naturală care apare aici este existența unui punct fix comun, adică existența unui punct s_0 astfel ca

$$s_0 = f_1(s_0) = f_2(s_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest sens putem demonstra o teoremă similară cu cea de la contracții. Să luăm $p_0 \in S$ arbitrar și să definim șirul iteratelor punctului p_0 prin perechea $\{f_1, f_2\}$ prin

$$p_{2j} = f_2(p_{2j-1}), \quad j = 1, 2, \ldots$$
$$p_{2j+1} = f_1(p_{2j}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

iar prin G_{p_0} să notăm funcția

$$G_{p_0}(x) = \{\inf F_{p_0, p_i}(x), \ x \text{ real}\}$$

Are loc:

TEOREMA 8.18. Fie (S, F) un spațiu metric probabilist complet în care IV_m sau IV_s este adevărată cu

$$\sup\{\tau(F, F), \ F < H\} = H$$

iar $f_i : S \to S$ o pereche contractivă. În acest caz:

1) sau există un punct fix comun,

2) sau pentru orice $p_0 \in S$, $\sup\{G_{p_0}(x), x \text{ real}\} < 1$.

Demonstrație. Să presupunem că există $p_0 \in S$ astfel ca

$$\sup\{G_{p_0}(x), \ x \text{ real}\} = 1.$$

În acest caz avem

$$F_{p_{2i+1}, 2j}(x) = F_{f_1(p_{2i}), f_2(p_{2j-1})}(x) \geqslant F_{p_{2i}, p_{2j-1}}(x/\alpha) \geqslant$$
$$\geqslant \ldots \geqslant F_{p_0, p_{2j-(2i+1)}}(x/\alpha^{(2j-2i-1)} \geqslant G_{p_0}(x/\alpha^{2j-2i-1}).$$

De asemenea

$$F_{p^{2i}, p^{2i+2j}}(x) \geqslant T(F_{p^{2i}, p^{2i+1}}(x-\varepsilon), F_{p^{2i+1}, p^{2i+2j}}(\varepsilon))$$

$$F_{p^{2i+1}, p^{2i+2j+1}}(x) \geqslant T(F_{p^{2i+1}, p^{2i+2j}}(x-\varepsilon), F_{p^{2i+2j}, p^{2i+2j+1}}(\varepsilon))$$

și ținînd seama de prima relație rezultă că șirul $\{p_i\}$ este un șir Cauchy și deci fie $p_* = \lim p_i$.

Cum avem

$$F_{f_1(p_*),p_*}(x) \geqslant T(F_{f_1(p_*),p_{2n}}(x-\varepsilon),\ F_{p_{2n},p_*}(\varepsilon)) \geqslant$$

$$\geqslant T(F_{p_*,p_{2n-1}}(x-\varepsilon),\ F_{p_{2n},p_*}(\varepsilon)),$$

pentru $n \to \infty$ obţinem că $f_1(p_*) = p_*$. Analog se demonstrează că $f_2(p_*) = p_*$.

Cum dacă q_* este un alt punct fix pentru perechea (f_1, f_2) avem

$$F_{f_1(p_*),f_2(q_*)}(x) = F_{p_*,q_*}(x) \geqslant F_{p_*,q_*}(x/\alpha^i)$$

unde l este arbitrar, trebuie să avem $p_* = q_*$. Teorema este astfel demonstrată pentru spaţiile în care (IV_m) este adevărată. Similar se procedează în cazul cînd (IV_s) este adevărată.

Din teorema demonstrată rezultă imediat şi:

TEOREMA 8.19. Orice pereche contractivă pe un spaţiu metric probabilist de tip Menger în care t-norma este Min, are un punct comun fix unic.

Demonstraţie. Se aplică tehnica din teorema de mai sus şi cea din teorema 8.3.

Este cunoscut că în teoria spaţiilor metrice se pot introduce anumite clase de aplicaţii pentru care există de asemenea puncte fixe şi aceste clase sînt legate de noţiunea de diametru al unei mulţimi mărginite.

Scopul nostru este acum de a introduce analogul acestor clase pentru cazul spaţiilor metrice probabiliste şi de a arăta că aceste clase nu sînt vide.

Vom reaminti mai întîi noţiunea de diametru probabilist al unei mulţimi A într-un spaţiu metric probabilist (S, F).

Fie deci (S, F) un spaţiu metric probabilist şi A o mulţime în S. Funcţia $x \to D_A(x) = \sup_{t<x} \{\inf_{p,q\in A} F_{p,q}(t)\}$ va fi numită diametru probabilist al mulţimii A. Să considerăm $f : S \to S$ şi să punem

$$\mathcal{O}(f_p^i) = \bigcup_{i=n}^{\infty} f^n(p).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum avem

$$\mathcal{O}(f_p^0) \supseteq \mathcal{O}(f_p^1) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{O}(f_p^i) \supseteq \ldots \mathcal{O}(f_p^{i+1} \supseteq \ldots$$

rezultă

$$D_{\mathcal{O}(f_p^0)} \leqslant D_{\mathcal{O}(f_p^1)} \leqslant \ldots \leqslant D_{\mathcal{O}(f_p^i)} \leqslant \ldots$$

Să punem

$$\delta_p(x) = \sup D_{\mathcal{O}(f_p^i)}(x),$$

care va fi numit diametru limită orbital al funcției f în punctul p. Este ușor de văzut că următoarele proprietăți au loc:

1) $0 \leqslant \delta_p(x) \leqslant 1$, $\delta_p(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$,

2) δ_p este continuă la stînga,

3) $\delta_p \in \Delta$.

Ultima proprietate justifică parțial denumirea pe diametru limită orbital probabilist. Clasa de aplicații o introducem prin:

DEFINIȚIA 8.20. O funcție $f: S \to S$ definită pe un spațiu metric probabilist (S,F) se spune că este cu diametru limită orbital diminuat în punctul p dacă are loc relația

$$\delta_p(x) < \delta_{\mathcal{O}(f_p^1)}(x)$$

pentru $\delta_{\mathcal{O}(f_p^1)} \neq H$.

Este ușor de văzut că are loc:

TEOREMA 8.21. Orice contracție locală pe un spațiu metric probabilist este o funcție cu diametru limită orbital diminuat în fiecare punct al spațiului.

Vom remarca faptul că se pot introduce alte clase de funcții care să reprezinte analogul unor clase de funcții din teoria punctelor fixe în cadrul spațiilor metrice sau al spațiilor Banach.

De asemenea se pot obține teoreme analoage celor date pentru șiruri de aplicații și puncte fixe, pentru cazul șirurilor de perechi de contracții [111].

Scanned with OKEN Scanner

8.4. Măsuri de necompacitate în spaţii metrice probabiliste

Este cunoscut că în teoria punctelor fixe un volum important în extinderea unor teoreme clasice, îl au diferite măsuri de necompacitate dintre care vom menţiona pe cele legate de numele lui Kuratowski şi Hausdorff. Este interesant de remarcat faptul că Kuratowski a introdus măsura de necompacitate în jurul anului 1930, dar aplicaţii efective la teoria punctelor fixe au fost făcute abia în 1955 de către Darbo. Denumirea de măsură de necompacitate Hausdorff provine de la teorema lui Hausdorff de caracterizare a mulţimilor compacte.

Apare în mod natural problema extinderii acestor concepte în cadrul spaţiilor metrice probabiliste.

Conceptul care extinde noţiunea de măsură de necompacitate în sensul lui Kuratowski la spaţii metrice probabiliste a fost introdus în [117] sub numele de funcţia lui Kuratowski.

Scopul nostru este de a introduce şi alte măsuri de necompacitate şi a da unele aplicaţii la teoria punctelor fixe.

Fie $(S, \mathcal{F})$ un spaţiu metric probabilist şi A o mulţime mărginită în S.

Reamintim că prin diametru al mulţimii A înţelegem funcţia

$$D_A(x) = \sup_{t<x} \inf_{p,q \in A} F_{pq}(t)$$

care se mai numeşte şi diametru probabilist al mulţimii A; mulţimea A se spune că este mărginită dacă

$$\sup_x D_A(x) = 1.$$

Analogul noţiunii de măsură de necompacitate a lui Kuratowski este dat în:

DEFINIŢIA 8.22. Dacă A este o mulţime mărginită în S atunci funcţia

$$\alpha_A(x) = \sup \{\varepsilon \geqslant 0 \; \exists \{A_j\}_{j \in J}, J \text{ finită}, \bigcup A_j = A, D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon\}$$

este funcţia probabilistă a lui Kuratowski.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţile funcţiei $\alpha_A(\cdot)$ a lui Kuratowski sînt date în :

TEOREMA 8.23. Funcţia $\alpha_A(\cdot)$ are următoarele proprietăţi :

1) α_A este o funcţie de repartiţie,

2) $\alpha_A(x) \geqslant D_A(x)$,

3) dacă $\emptyset \neq A \subset B$ atunci $\alpha_A(x) \geqslant \alpha_B(x)$,

4) $\alpha_{A \cup B}(x) = \min\{\alpha_A(x), \alpha_B(x)\}$,

5) $\alpha_A(x) = \alpha_{\bar{A}}(x)$ unde $\bar{A}$ este închiderea mulţimii A în topologia (ε, λ).

Demonstraţie. 1). Evident că dacă $x = 0$, $D_A(x) = 0$, oricare ar fi $A \subset S$ şi deci $\alpha_A(0) = 0$.

Să presupunem că $x_1 < x_2$ şi cum pentru orice j, $D_{A_j}(x_1) < D_{A_j}(x_2)$ deducem că $\alpha_A(x_1) \leqslant \alpha_A(x_2)$. Să demonstrăm că $\sup_x \alpha_A(x) = 1$. În adevăr, cum A este mărginită, există $\{A_j\}_{j \in J}$ astfel ca $\sup D_{A_j}(x) = 1$ şi deci pentru $\eta \in (0,1)$ există x_j astfel ca $D_{A_j}(x_j) > 1 - \eta$. Dacă $x = \max x_j$ atunci $\alpha_A(x) > 1 - \eta$, care ne dă că $\lim_x \alpha_A(x) = 1$.

Rămîne să arătăm că $\alpha_A(\cdot)$ este continuă la stînga.

Să punem

$$K_{A,x} = \{\varepsilon \geqslant 0 \quad (\exists) \quad \{A_j\}_{j \in J} \text{ finită}, \quad A = \cup A_j D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon\}$$

şi fie $x_0 \in (0, \infty)$ iar $\varepsilon \in K_{A,x_0}$. Dacă $\eta > 0$ cum D_{A_j} este continuă la stînga există δ_j astfel ca $D_{A_j}(x_0) - D_{A_j}(x) < \eta$ pentru $0 < x_0 - x < \delta$. Fie $\delta = \min_{j \in J} \delta_j$ şi $\eta < \varepsilon$. Dacă $x - x_0 < \delta$ atunci $D_{A_j}(x) > \varepsilon - \eta$ şi $\varepsilon - \eta \in K_{A,x}$ ne dă că $\varepsilon - \eta \leqslant \alpha_A(x)$, de unde $\alpha_A(x_0) - \alpha_A(x) < \eta$ care ne dă continuitatea la stînga.

Proprietatea 2) este evidentă în virtutea definiţiei funcţiei $\alpha_A(x)$ şi de asemenea 3).

Să demonstrăm proprietatea 4). Din definiţia funcţiei lui Kuratowski, rezultă că pentru orice $\delta > 0$ există $\varepsilon_j \in K_{A,x}$ şi o acoperire $\{A_j\}_{j \in J}$ a mulţimii A astfel ca $\alpha_A(x) - \delta \leqslant \varepsilon_\delta \leqslant D_{A_j^\delta}$. Similar există $\eta_\delta \in K_{B,x}$ şi $\{B_i^\delta\}_{i \in I}$ astfel ca $\alpha_B(x) - \delta \leqslant \eta\delta \leqslant D_{B_i^\delta}$ şi acoperirea $\{\cup A_j^\delta\} \cup \{B_i^\delta\}$ pentru $A \cup B$ ne dă că $D_{cm}(x) \geqslant \alpha_A(x) - \delta$ adică $\alpha_A(x) - \delta \in K_{A \cup B, x}$ şi deci $\alpha_{A \cup B}(x) \geqslant \alpha_A(x)$. Analog $\alpha_{A \cup B}(x) \geqslant \alpha_B(x)$ şi relaţia 4) este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea 5) rezultă din 4) şi din rezultatul cunoscut că $D_A^*(x) = D_{\bar{A}}(x)$.

Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă dă un mod de a calcula funcţia lui Kuratowski.

TEOREMA 8.24. Fie K_A mulţimea funcţiilor $f \in \Delta$ astfel că există o acoperire finită a lui A, $A = \bigcup A_j, j \in J$ finită cu $D_{A_j}(x) \geqslant F(x), \forall j \in J$. Avem

$$\beta_A(x) = \inf_{F \in K_A} F(x) = \alpha_A(x).$$

Demonstraţie. Dacă $F \in K_A$, atunci $F(x) \in K_{A,x}$ de unde rezultă că $\beta_A(x) \leqslant \alpha_A(x)$.

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $\varepsilon > 0$ şi $x > 0$. Din definiţia lui $\alpha_A(x)$ rezultă că există $\varepsilon' \in K_{A,x}$ astfel încît $\alpha_A(x) - \varepsilon < \varepsilon'$. Cum $\varepsilon' \in K_{A,x}$ există $A_j, j = 1, 2, \ldots, n$ astfel ca $D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon'$.

Fie $F_{x,\varepsilon'}(y) = \inf_{1 \leqslant j \leqslant n} D_{A_j}(x)$ şi deci $F_{x,\varepsilon'} \in K_A$ implică $F_{x,\varepsilon'}(y) \leqslant \beta_A(y)$.

Cum $D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon'$, atunci avem că $F_{x,\varepsilon'}(x) \geqslant \varepsilon$ şi deci $\alpha_A(x) - \varepsilon \leqslant \varepsilon' \leqslant F_{x,\varepsilon'}(x) \leqslant \beta_A(x)$ de unde $\alpha_A(x) - \varepsilon \leqslant \beta_A(x)$, ε fiind arbitrar inegalitatea este demonstrată.

Este cunoscut că măsura de necompacitate a lui Kuratowski dă o caracterizare a mulţimilor precompacte. Este natural să se pună problema utilizării funcţiei probabiliste a lui Kuratowski în acelaşi scop la cazul spaţiilor metrice probabiliste.

DEFINIŢIA 8.25. Un spaţiu metric probabilist $(S, \mathscr{F})$ este precompact dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o acoperire finită a lui S, $S = \bigcup A_i$, $i \in I =$ finită şi astfel că $D_{A_j}(\varepsilon) > 1 - \lambda$.

Are loc:

TEOREMA 8.26. Dacă $(S, \mathscr{F})$ este un spaţiu metric probabilist precompact atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ există o mulţime finită $A_{\varepsilon,\lambda} \subset S$ astfel ca pentru orice $p \in S$ există $q \in A_{\varepsilon,\lambda}$, astfel ca

$$F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \eta.$$

Demonstraţie. Fie $D'_A(x) = \inf \{F_{pq}(x), A \ni p,q\}$ şi deci

$$D_A(x_0) = \lim_{\substack{x < x_0 \\ x \to x_0}} D'_A(x) \leqslant D'_A(x_0) \leqslant F_{pq}(x_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\lambda = \frac{1}{m}$ și în acest mod obținem o acoperire finită a lui S, $\{A_i^{mn}\}_{i \in I}$, astfel ca $D_{mn}\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{m-1}{m}$ care ne dă că $F_{pq}\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{m}$ dacă $p, q \in A_i^{mn}$. Fie $p_i^{mn} \in A_i^{mn}$ și să luăm $A_{mn} = \{p_i^{mn}\}_{i \in I}$, de unde obținem pentru $r \in S$ și care fiind într-un A_i^{mn}, $F_{rp_i}\left(\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{m}$.

Dacă $\varepsilon > \frac{1}{n}$ și $\lambda > \frac{1}{m}$, vom lua $A_{\varepsilon\lambda} = A_{mn}$, care satisface cerințele teoremei.

Vom introduce acum noțiunea de funcție probabilistă a lui Hausdorff pentru spații metrice probabiliste.

Fie $(S, \mathcal{F})$ un spațiu metric probabilist și să notăm cu $\mathcal{D}_{A,B}(x)$ distanța probabilistă între două mulțimi A, B închise și mărginite din S.

DEFINIȚIA 8.27. Fie A o mulțime mărginită în S și să definim funcția $\chi_A(x)$ astfel:

$$\chi_A(x) = \sup \{\varepsilon > 0 \text{ există } F_\varepsilon \in S \text{ astfel ca } D_{\{x\}}, F_\varepsilon(x) > \varepsilon\},$$

care se va numi funcția probabilistă a lui Hausdorff atașată mulțimii mărginite $A \subset S$.

Se poate arăta că teorema 8.22 are un analog și pentru funcția χ_A de asemenea și caracterizarea spațiilor precompacte cu ajutorul funcției χ_A.

O noțiune care generalizează pe cea de operator compact sau contracție este noțiunea de α-contracție introdusă de G. Darbo sau cea de operator densificator introdusă de Sadovski. Extensia la cazul spațiilor metrice probabiliste pentru cazul funcției lui Kuratowski a fost dată în [117], iar pentru funcția lui Hausdorff este dată în cele ce urmează.

DEFINIȚIA 8.28. O funcție $f: S \to S$ se numește α-densificatoare dacă pentru orice mulțime mărginită A avem

$$\alpha_{f_A}(x) > \alpha_A(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 8.29. O funcție $f : S \to S$ se numește χ-densificatoare dacă pentru orice mulțime mărginită $A \subset S$,

$$\chi_{f_A}(x) > \chi_A(x).$$

Se poate arăta că orice f care este contracție este în clasele introduse în definițiile 8.26 și 8.27 și că unele teoreme de punct fix de la spații metrice admit variante în acest cadru.

Vom menționa cîteva probleme ale căror soluții ar fi interesante și care sînt, se pare, foarte importante:

1. este adevărată teorema lui Brouwer în spații normate probabiliste, finit-dimensionale,

2. este adevărată teorema lui Birkhoff — Kellog — Schauder — Tihonov în spații normate probabiliste sau spații local convexe probabiliste?

3. se poate face o teorie a gradului topologic pe spații normate probabiliste sau local convexe?

4. se pot extinde teoremele de punct fix la unele clase de spații probabiliste nearhimedeene?

Scanned with OKEN Scanner

9 Dinamica topologică probabilistă

Teoria topologică a sistemelor dinamice ale cărei începuturi se găsesc la G. D. Birkhoff s-a dezvoltat intensiv devenind o ramură foarte importantă a matematicii. La această dezvoltare și-au adus contribuția o serie de matematicieni printre care vom menționa pe Poincaré, Liapunov, Morse, A. A. Markov, Bebutov, Hedlund, Gotschalk etc.

Cadrul natural în care s-a dezvoltat această teorie a fost cel al spațiilor metrice. Apare astfel natural problema definirii și studierii sistemelor dinamice în cadrul spațiilor metrice probabiliste și chiar al spațiilor topologice probabiliste.

Scopul nostru este de a expune succint o astfel de teorie.

Pentru ușurința lecturii vom da și noțiunile corespunzătoare din teoria sistemelor dinamice pe spații metrice.

9.1. Sisteme dinamice pe spații metrice și spații metrice probabiliste

Fie (X, ρ) un spațiu metric.

DEFINIȚIA 9.1. Prin sistem dinamic în spațiul X vom înțelege o funcție

$$f : X \times R \to X$$

cu următoarele proprietăți :

1° $f(p,0) = p \ \forall \ p \in X$,

Scanned with OKEN Scanner

2° oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există δ și $\eta > 0$ astfel că dacă

$$\rho(p - p_0) < \delta$$

$$|t - t_0| < \eta,$$

atunci

$$\rho(f(p, t), f(p_0, t_0)) < \varepsilon.$$

3° $f(p, t_0 + t_1) = f(f(p, t_0), t_1) \; \forall \; t_0, t_1 \in R.$

Funcția f, pentru p fix, se numește mișcare, mulțimea $\bigcup_{t \in R} f(p,t)$ traiectoria mișcării, iar $\bigcup_{t \leqslant 0 \text{ (or } t \geqslant 0)} f(p,t)$ semitraiectorii ale mișcării.

DEFINIȚIA 9.2. O mulțime $A \subset X$ se spune invariantă pentru sistemul dinamic $f : X \times R \to X$ dacă oricare ar fi $(x, t) \in A \times R$ avem $f(x, t) \in A$.

DEFINIȚIA 9.3. Un punct x_0 se spune staționar dacă

$$f(x_0, t) = x_0 \; \forall \; t \in R.$$

Fie $f : X \times R \to X$ un sistem dinamic și x_0 un punct arbitrar. Sînt posibile trei cazuri:

1. x_0 este staționar în sensul definiției 9.3,

2. $f(x_0, t) \neq x_0$, există t_1 și t_2 astfel ca $f(x_0, t_1) = f(x_0, t_2)$ și punînd $t_2 - t_1 = \tau > 0$ avem că

$$f(x_0, t + \tau) = f(x_0, t + t_2 - t_1) = f(f(x_0, t_2), t - t_1) =$$

$$= f(f(x_0, t_1), t - t_1) = f(x_0, t_1 + t - t_1) = f(x_0, t)$$

oricare ar fi $t \in R$. În acest caz se spune că τ este perioadă a sistemului dinamic, care se numește în acest caz periodic.

Este evident că $n\tau$ este de asemenea o perioadă a sistemului dinamic și că printre numerele pozitive care sînt perioade ale sistemului dinamic există unul cel mai mic care se va numi perioada sistemului.

3. $f(x_0, t_1) \neq f(x_0, t_2)$ dacă $t_1 = t_2$.

În acest caz mișcarea se spune nesingulară.

DEFINIȚIA 9.4. Două sisteme dinamice $f : X \times R \to X$ și $g : Y \times R \to Y$ se spun izomorfe dacă există un omeomorfism $h : X \to Y$

Scanned with OKEN Scanner

astfel ca

$$h(f(x, t)) = g(h(x), t).$$

Vom introduce acum noţiunea de sistem dinamic pe un spaţiu metric probabilist (S, F).

DEFINIŢIA 9.5. Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist şi

$$f: S \times R \to S.$$

Se spune că f este un sistem dinamic probabilist dacă următoarele condiţii sînt satisfăcute:

1. $f(p, 0) = p$,
2. $\lim\limits_{\substack{p \to p_0 \\ t \to t_0}} f(p, t) = f(p_0, t_0)$,
3. $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2) \ \forall \ p \in X, \ t_1, t_2 \in R$.

Vom remarca faptul că condiţia 2 se poate exprima şi astfel: pentru orice $\varepsilon' > 0$ şi $\lambda' > 0$ există ε, λ şi δ numere pozitive astfel ca

$$p \in N_{\varepsilon,\lambda}(p_0) \text{ şi } |t - t_0| < \delta$$

atunci

$$f(p_0, t_0) \in N_{\varepsilon', \lambda'}(f(p_0, t_0)).$$

Exact ca în cazul sistemelor dinamice definite pe spaţii metrice se poate face o clasificare a punctelor de pe o traiectorie a mişcării unui sistem dinamic definit pe un spaţiu metric probabilist.

Fie (S, ρ) un spaţiu metric; este uşor de văzut şi bine cunoscut că distanţa ρ este o funcţie uniform continuă pe $S \times S$ şi acest lucru este foarte important în stabilirea următoarei proprietăţi a sistemelor dinamice pe spaţiul S: fie $f: S \times R \to S$ un sistem dinamic şi $p \in S$, $T > 0$ iar $\varepsilon > 0$. În acest caz există $\delta > 0$ astfel ca $\rho(f(q,t), f(p,t)) < \varepsilon$ dacă avem $\rho(p,q) < \delta$ şi $0 \leqslant t \leqslant T$. În cele ce urmează prezentăm o extensie a acestui rezultat la cazul unor spaţii metrice statistice. Vom avea nevoie de:

TEOREMA 9.6. (Teorema 10.8, capitolul X). Fie (S,F) un spaţiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T cu proprietatea

$$\lim_{x \to 1} T(a,x) = a$$

Scanned with OKEN Scanner

uniform pe intervalul [0,1]. Dacă mulțimea Δ este înzestrată cu metrica lui Lévy L, atunci F este uniform continuă ca funcție de la $S \times S \to \Delta$.

Reamintim că metrica lui Lévy se definește astfel: pentru $F, G \in \Delta$

$$L(F, G) = \inf \{h, F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h\}.$$

Rezultatul care generalizează teorema de la spațiile metrice este:

TEOREMA 9.7. Fie $f: S \times R \to R$ un sistem dinamic probabilist pe spațiul metric probabilist (S,F) care este de tip Menger cu t-norma T ca în teorema 10.8 Cap. X. În acest caz pentru $p \in S$, $T > 0$ și ε, $\lambda > 0$ există $\delta > 0$ și $\mu > 0$ astfel ca

$$f(q, t)\, N_{f(p,\, t)}\, t(\varepsilon, \lambda)$$

oricare ar fi $q \in S$ și $t \in I$ cu proprietatea că $q \in N_p(\delta, \mu)$ și $0 \leqslant t \leqslant T$

Demonstrație. Să presupunem că afirmația din teoremă nu este adevărată și deci există un punct $p_0 \in S$ astfel ca pentru un $T_0 > 0$ și $\varepsilon_0, \lambda_0 > 0$ nu există δ și μ cu proprietatea din teoremă. Deci să luăm $\{\delta_n\}$, $\{\mu_n\}$ șiruri care tind către zero astfel ca pentru fiecare n să avem punctul q_n cu proprietățile:

1. $q_n \in N_{p_0}(\delta_n, \mu_n)$,

2. $t_n \in [0, T_0]$, $f(p_0, t_n) \notin N_{f(q_n,\, t_n)}(\varepsilon_0, \lambda_0)$. (9.7.1)

Cum șirul $\{t_n\}$ este mărginit, putem presupune fără a restrînge generalitatea că $\{t_n\}$ este convergent, $\lim t_n = t_0$. În virtutea ipotezelor puse asupra sistemului dinamic rezultă că

$$\lim f(q_n, t_n) = f(p_0, t_0),$$

$$\lim f(p_0, t_n) = f(p_0, t_0).$$

În baza continuității uniforme pentru F, trecînd la limită în (9.7.1) 2, obținem o contradicție. Teorema este astfel demonstrată.

Vom menționa că putem introduce o clasificare a mișcărilor și a traiectoriilor unui sistem dinamic în același mod ca pentru sistemele dinamice deterministe.

Scanned with OKEN Scanner

9.2. Sisteme dinamice probabiliste izomorfe (echivalente)

O noțiune importantă în teoria sistemelor dinamice este aceea de echivalență. Vom defini acum o noțiune similară pentru sisteme dinamice probabiliste și vom da cîteva proprietăți.

DEFINIȚIA 9.8. Fie (S_1,F_1) și (S_2,F_2) două spații metrice probabiliste și $f: S_1 \times R \to S_1$, $g: S_2 \times R \to S_2$ două sisteme dinamice probabiliste. Se spune că cele două sisteme dinamice probabiliste sînt echivalente (izomorfe) dacă există un omeomorfism

$$\xi : S_1 \to S_2$$

ca spații metrice probabiliste și pentru orice $p \in S_1$ avem

$$\xi(f(p, t)) = g(\xi(p), t) \text{ pentru } \quad \forall\, t \in R.$$

Este ușor de văzut că unele proprietăți ale sistemului dinamic se transportă imediat la toate sistemele dinamice echivalente cu el. Vom menționa cîteva dintre acestea: dacă p este un punct staționar atunci $\xi(p)$ este de asemenea staționar, mulțimile invariante au ca imagine tot mulțimi invariante, mulțimile minimale (adică mulțimi închise invariante care sînt și minimele în sensul că nu conțin submulțimi proprii cu proprietatea descrisă) au ca imagine tot mulțimi minimale.

Încheiem acest paragraf cu o problemă care pare interesantă. Să definim mai întîi o clasă specială de puncte ale unui sistem dinamic probabilist.

DEFINIȚIA 9.9. Punctul q se numește ω punct limită pentru sistemul dinamic probabilist $f: S \times R \to S$ dacă există $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ astfel ca $(f(p, t_n) \to q$.

Problema care se pune este de a vedea dacă mulțimea S a punctelor ω-limită trece într-o mulțime de același tip la sisteme echivalente.

9.3. Stabilitate pentru sisteme dinamice probabiliste

În cazul spațiilor metrice și al sistemelor dinamice peste aceste spații există mai multe noțiuni de stabilitate ca de exemplu: stabilitate în sensul lui Lagrange, Poisson, Liapunov etc.

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează vom da cîteva rezultate simple privind analogul stabilităţii Liapunov pentru sisteme dinamice probabiliste.

DEFINIŢIA 9.10. Punctul p al sistemului dinamic probabilist

$$f : S \times R \to S$$

se spune stabil în sensul lui Liapunov în direcţie pozitivă dacă oricare ar fi ε, $\lambda > 0$ există δ şi $\eta > 0$ astfel că dacă

$$q \in N_p(\delta, \eta)$$

atunci să avem oricare ar fi $t \in R_+$

$$f(p, t) \in N_{f(q,t)}(\varepsilon, \lambda).$$

Vom remarca şi faptul că exact ca în cazul sistemelor dinamice pe spaţii metrice această definiţie poate fi relativizată în raport cu mulţimea $B \subset S$.

DEFINIŢIA 9.11. Mulţimea $A \subset S$ se numeşte stabilă în sens Liapunov în direcţie pozitivă în raport cu mulţimea $B \subset S$ dacă fiecare punct al mulţimii A este stabil în sens Liapunov în direcţie pozitivă în raport cu mulţimea B.

Are loc:

TEOREMA 9.12. Mulţimea punctelor stabile (relativ la B) în sensul lui Liapunov în direcţie pozitivă este invariantă (relativ la B).

Demonstraţie. Fie punctul $p \in S$ stabil şi deci pentru orice ε, $\lambda > 0$, există δ, $\eta > 0$, astfel ca relaţiile de mai sus să fie adevărate. Să considerăm punctul $p_1 = f(p, t_1)$ al traiectoriei $f(p, I)$. Trebuie să arătăm că acest punct este stabil în sensul lui Liapunov. Cum am menţionat mai sus, închiderea unei mulţimi invariante este de asemenea invariantă şi deci $p_1 \in \overline{B}$. Din teorema de mai înainte rezultă că există ε şi $\lambda > 0$ astfel ca din relaţia $r \in N_{p_1}(\delta, \mu)$ şi $|t| \leqslant |t_1|$ să deducem că

$$f(r,t) \in N_{f(p_1,t)}(\varepsilon, \lambda).$$

Pentru $t = -t_1$ avem că $f(r, -t_1) \in N_p(\delta, \mu)$ şi este de asemenea în B deoarece B este invariantă. Cum $p = f(p, -t_1)$, din definiţia stabilităţii în sensul lui Liapunov deducem că

$$f(r, t - t_1) \in N_{f(p_1, t-t_1)}(\varepsilon, \lambda)$$

Scanned with OKEN Scanner

oricare ar fi $t > 0$ și deci

$$f(r, t) \in N_{f(p_1,\, t)}\ (\varepsilon, \lambda).$$

oricare ar fi $t > -t_1$ și deci această relație are loc și pentru $|t| \leqslant |t_1|$ de unde rezultă că are loc pentru orice $t > 0$ și punctul p_1 este astfel stabil în sensul lui Liapunov.

Vom menționa că prin analogie cu cazul spațiilor metrice se poate introduce noțiunea de sistem dinamic probabilist în sens Liapunov. Problema care se pune este următoarea: orice sistem dinamic probabilist aproape periodic este stabil în sensul lui Liapunov? De asemenea apare naturală problema dacă mulțimile stabile în sensul lui Liapunov se transformă printr-un izomorfism tot în mulțimi de același tip.

9.4. Sisteme dinamice probabiliste generalizate

Este cunoscut că sistemele dinamice pe un spațiu metric au fost generalizate considerînd spații topologice în loc de spații metrice și un grup topologic (în unele cazuri grupuri abeliene în loc de grupul R).

Scopul nostru este de a prezenta o generalizare a sistemelor dinamice probabiliste pentru cazul spațiilor topologice probabiliste și al grupurilor topologice arbitrare.

DEFINIȚIA 9.13. Fie (S, θ, T) un spațiu topologic probabilist și G un grup. Aplicația

$$f : S \times G \to S$$

este un sistem dinamic probabilist generalizat dacă următoarele condiții sînt satisfăcute:

$\alpha)$ $f(p, 0) = p$, $\forall\, p \in S$,

$\beta)$ $f(p, g)$ este continuă pentru orice $g \in G$ fix,

$\gamma)$ $f(f(p, g_1), g_2) = f(p, g_1 + g_2)$.

DEFINIȚIA 9.14. Un sistem dinamic probabilist generalizat se spune că este continuu dacă G este un grup topologic și

$$f : S \times G \to S$$

este o funcție continuă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă avem un sistem dinamic probabilist generalizat ca în definiția 9.13, vom scrie aceasta pe scurt astfel (S, G, f).

Prin definiție mulțimea

$$f(p, G) = \bigcup_{g \in G} f(p, g)$$

va fi numită orbita punctului p. Un punct $p \in S$ se va numi recursiv dacă pentru orice vecinătate a sa U există o submulțime $A \subset G$ astfel ca

$$f(p, A) \subseteq U,$$

unde $f(p, A) = \bigcup_{g \in A} f(p,g)$. Un punct $p \in S$ se spune că este local recursiv dacă pentru orice vecinătate $U \ni p$ există o vecinătate $V \ni p$ astfel ca să avem relația

$$f(V,A) \subset U.$$

DEFINIȚIA 9.15. Un sistem dinamic probabilist generalizat se va numi discret dacă G este un grup ciclic.

DEFINIȚIA 9.16. Un grup G se spune că este parțial ordonat dacă între anumite elemente ale sale a fost definită o relație, pe care o notăm cu „$<$” și satisface următoarelor axiome :

1. $g < g$ nu este posibilă,
2. $g_1 < g_2$, $g_2 < g_3 \Rightarrow g_1 < g_3$,
3. $g_1 < g_2$ atunci oricare ar fi $g \in G$ avem relațiile

$$g + g_1 < g + g_2,$$

$$g_1 + g < g_2 + g.$$

(Vom remarca faptul că $G = K$ corpul numerelor complexe, poate fi dat ca exemplu de grup parțial ordonat, definind relația $<$ prin

$$z_1 < z_2$$

cu $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ dacă și numai dacă $x_1 < x_2$.)

DEFINIȚIA 9.17. Un sistem dinamic probabilist generalizat în care G este un grup parțial ordonat se spune că este un sistem dinamic probabilist generalizat parțial ordonat.

În cadrul sistemelor dinamice probabiliste generalizate se pot defini în mod natural multe noțiuni care au fost considerate la sisteme dinamice și la sisteme dinamice probabiliste.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru exemplificare vom defini în cadrul sistemelor dinamice probabiliste generalizate parțial ordonate, noțiunea de ω-punct limită.

DEFINIȚIA 9.18. Punctul q se numește punct ω-limită dacă pentru orice (ε, λ) numere pozitive și $g \in G$ există $g_1 \in G$ astfel ca

$$f(p, g_1) \in N_q(\varepsilon, \lambda).$$

Este cunoscut că sistemele dinamice definite în cadrul spațiilor metrice au fost generalizate într-o altă direcție considerînd așa numitele sisteme dinamice dispersive. Să reamintim pe scurt definiția acestei noțiuni.

Fie (S, ρ) un spațiu metric complet și A, B două mulțimi închise și mărginite din S. Să considerăm în spațiul mulțimilor din S care sînt închise și mărginite metrica lui Pompeiu-Hausdorff definită prin

$$\rho^*(A, B) = \max \{\sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{x \in B} \rho(x, A)\}$$

unde

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \{\rho(x, y)\}.$$

Pentru detalii privind metrica lui Pompeiu-Hausdorff a se vedea [100, Cap. VII].

Să notăm cu $\mathscr{C}(S)$ familia mulțimilor închise și mărginite nevide ale lui S metrizată cu metrica lui Pompeiu-Hausdorff și

$$f : S \to \mathscr{C}(S)$$

iar prin $f(A, K)$, $K \subset I$ să notăm mulțimea

$$\bigcup_{p \in A,\ t \in K} f(p, t).$$

DEFINIȚIA 9.19. Prin sistem dinamic dispersiv vom înțelege o funcție $f : S \to \mathscr{C}(S)$ cu următoarele proprietăți :

1. $f(p, 0) = p, \forall\, p \in S$,
2. $q \in f(p, t) \Rightarrow p \in f(q, -t)$,
3. $t_1, t_2 > \Rightarrow f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$,
4. $\lim\limits_{\substack{p \to p_0 \\ t \to t_0}} \left(\sup\limits_{a \in f(p_0, t_0)} \rho(a, f(p_0, t_0)) \right) = 0.$

Noțiunea de sistem dinamic dispersiv se extinde la cazul spațiilor metrice probabiliste utilizînd, evident, noțiunea de metrică probabilistă

Scanned with OKEN Scanner

Pompeiu-Hausdorff. Reamintim pe scurt definiția metricii probabiliste Pompeiu-Hausdorff.

DEFINIȚIA 9.20. Fie (S,F) un spațiu metric probabilist iar A și B submulțimi închise din S. Distanța probabilistă între A și B este prin definiție funcția

$$F_{AB}(x) = \sup_{t<x} (\inf_{p\in A} \sup_{q\in B} F_{pq}(t), \inf_{q\in B} \sup_{p\in A} F_{pq}(t)).$$

Se știe că familia mulțimilor închise din S cu metrica probabilistă dată în această definiție, T fiind o t-normă, este un spațiu metric probabilist de tip Menger dacă spațiul (S,F,T) este un spațiu metric probabilist de tip Menger.

Noțiunea de sistem dinamic probabilist dispersiv o introducem în:

DEFINIȚIA 9.21. Prin sistem dinamic probabilist dispersiv vom înțelege o aplicație

$$f : S \times R \to \mathscr{C}(S),$$

unde $\mathscr{C}(S)$ este familia mulțimilor închise ale spațiului metric probabilist de tip Menger (S,F,T), care are următoarele proprietăți:

1. $f(p, 0) = p, \forall\, p \in S,$
2. $q \in f(p, t) \Rightarrow p \in f(p, -t,$
3. $t_1, t_2 \in R\ f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2),$
4. $f(p, t) \to f(p_0, t_0)$ (în metrica probabilistă Pompeiu-Hausdorff), $\substack{p\to p_0 \\ t\to t_0}$

unde am pus $f(A, K) = \bigcup_{\substack{p\in A \\ t\in K}} f(p, t)$.

Noțiunea de continuitate și condiția de continuitate integrală se introduce în modul următor:

DEFINIȚIA 9.22. Un punct $p_0 \in S$ este punct de continuitate dacă în metrica probabilistă Pompeiu-Hausdorff are loc relația

$$\lim_{p\to p_0} f(p, t) = f(p_0, t)$$

oricare ar fi $t \in R$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 9.23. Pentru sistemul probabilist dispersiv se spune că are loc condiția de continuitate integrală dacă pentru orice $p \in S$, (ε, λ) pozitive și $T > 0$ există (δ, μ) pozitive astfel încît oricare ar fi $q \in N_p(\delta, \mu)$ și $|t| \leqslant T$

$$N_{f(p,\,t)}(\varepsilon, \lambda) \ni f(q,t).$$

Vom remarca faptul că și alte noțiuni și teoreme de la sisteme dinamice probabiliste și mai ales de la sisteme dinamice dispersive au un analog în acest cadru general. De asemenea, urmînd teoria sistemelor dinamice dispersive parțial ordonate putem introduce și dezvolta teoria pentru cazul sistemelor probabiliste.

Scanned with OKEN Scanner

10 Metrici pe spațiul funcțiilor de repartiție

Introducerea de metrici pe spațiul Δ^* al funcțiilor de repartiție, adică al funcțiilor F definite pe dreapta reală, nedescrescătoare, continue la stînga și astfel încît

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

este utilă în mai multe probleme din teoria probabilităților.

În cele ce urmează vom studia două astfel de metrici : metrica lui Lévy și metrica lui Lévy modificată, introduse respectiv de Lévy pe Δ^* și de D. Siblay pe mulțimea Δ a funcțiilor crescătoare și continue la stînga cu valori în $[0,1]$. Evident $\Delta^* \subset \Delta$.

10.1. Metrica lui Lévy

Fie F,G două funcții din Δ și să punem :

$$L(F,G) = \inf \{h,\ F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h,\ \forall x\}$$

$$A(F, G : h) \Leftrightarrow F(x-h) - h \leqslant G(x) \quad \text{dacă} \quad x \in \left[-\frac{1}{h}, h + \frac{1}{h}\right],$$

$$B(F, G, h) \Leftrightarrow F(x+h) + h \geqslant G(x) \quad \text{dacă} \quad x \in \left[-h - \frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right].$$

Teorema 10.1. *L este o metrică pe Δ.*

Demonstrație. În adevăr, $L(F, G) = 0$, implică evident că $F = G$ în toate punctele de continuitate la stînga și deci $F = G$ peste tot.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $h_n \to L(F, G)$ şi pentru $x = x + h_n$ deducem că

$$F(x) - h_n \leqslant G(x + h_n)$$

şi pentru $x - h_n$

$$G(x - h_n) \leqslant F(x) + h_n$$

de unde rezultă că

$$G(x - h_n) - h_n \leqslant F(x) \leqslant G(x + h_n) + h_n,$$

care ne dă relaţia

$$L(F, G) = L(G, F).$$

Să arătăm acum că are loc şi inegalitatea triunghiului. Fie F, G, H trei funcţii din Δ şi să presupunem că $L(F, G) + L(G, H) < 1$, căci în caz contrar relaţia

$$L(F, H) \leqslant L(F, G) + L(G, H)$$

este evidentă. Fie $h = L(F, G)$, $k = L(G, H)$, de unde deducem că

$$F(x - h - k) - h - k \leqslant G(x - k) - k \leqslant H(x) + k \leqslant H(x + h) + h + k$$

care demonstrează afirmaţia noastră.

Este cunoscut că orice şir de funcţii $\{F_n\} \subset \Delta$ are un subşir slab convergent care nu este în mod necesar o funcţie de repartiţie şi că Δ^* cu metrica lui Lévy este un spaţiu metric complet, iar convergenţa în această metrică este echivalentă cu convergenţă slabă dacă limita este în Δ^*. Această observaţie face ca să încercăm o altă metrică care să nu aibă acest defect : metrica lui Lévy este sensibilă la ce se întîmplă la $-\infty$ şi ∞ în timp ce convergenţa slabă nu este. Metrica pe care o introducem în § 2 nu mai posedă acest inconvenient şi a fost construită de D. Sibley.

10.2. Metrica lui Lévy modificată sau metrica lui Sibley

Fie $F, G \in \Delta$ şi A, B următoarele proprietăţi :

(1) $A(F, G, h) \Leftrightarrow F(x - h) - h \leqslant G(x)\,;\, \forall\, x \in \left[-\frac{1}{h}, \frac{1}{h} + h\right],\ h > 0$

(2) $B(F, G, h) \Leftrightarrow F(x + h) + h \geqslant G(x)\,;\, \forall\, x \in \left[-h - \frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right],\ h > 0$

şi

$$(3)\quad L(F, G) = \inf\{h,\ A(F, G, h) \text{ şi } B(F, G, h)\}.$$

Are loc:

TEOREMA 10.2. $A(F,G,h)$ are loc dacă şi numai dacă are loc $B(F,G,h)$.

Demonstraţie. Este suficient să înlocuim în (1) pe x cu $x - h$.

TEOREMA 10.3. $A(F,G,h)$ este echivalentă cu

$$F\left(x - \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} \leqslant G\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

oricare ar fi $x \in \left[-\frac{h}{2} - \frac{1}{h}, \frac{h}{2} + \frac{1}{h}\right]$.

Demonstraţie. Dacă punem în (1)

$$x \to x - \frac{h}{2}$$

afirmaţia este evidentă.

Următoarea teoremă arată importanţa aplicaţiei

$$\mathscr{L} : (F, G) \to \mathscr{L}(F, G).$$

TEOREMA 10.4. Aplicaţia $\mathscr{L}$ este o metrică.

Demonstraţie. Este uşor de văzut că dacă $\mathscr{L}(F,G) = 0$, atunci $F = G$ şi că $\mathscr{L}(F,G) = \mathscr{L}(G,F)$. Să arătăm că are loc şi inegalitatea triunghiului. Fie F, G, H din Δ şi $\mathscr{L}(F,G) = h$, $\mathscr{L}(G,H) = k$. Dacă $h + k \geqslant 1$; inegalitatea triunghiului este evidentă. Să presupunem că $k + h < 1$ şi fie $I_a = \left[-\frac{a}{2} - \frac{1}{a}, \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right]$ iar $x \in I_{h+k}$. Cum $h(h + k) < 1$ rezultă că $x - \frac{k}{2} \in I_h$ şi $x + \frac{h}{2} \in I_k$. Din proprietăţile $A(F, G, h)$ şi $A(G, H, k)$ rezultă că

$$F\left(x - \frac{h+k}{2}\right) - \frac{k+h}{2} \leqslant G\left(x - \frac{k}{2} - \frac{h}{2}\right) - \frac{k}{2} + \frac{h}{2} \leqslant$$

$$\leqslant H\left(x + \frac{h+k}{2}\right) + \frac{h+k}{2},$$

adică are loc $A(F,G,h + k)$. Similar arătăm că are loc $B(F,H,h + k)$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci

$$\mathscr{L}(F, H) \leqslant \mathscr{L}(F, G) + \mathscr{L}(G, H).$$

Teorema este astfel demonstrată.

Pentru cele ce urmează amintim noţiunea de convergenţă slabă pentru funcţii de repartiţie.

DEFINIŢIA 10.5. Un şir $\{F_n\} \subset \Delta$ se spune că converge slab către funcţia $F \in \Delta$ dacă $\{F_n\}$ converge punctul către F în orice punct de continuitate al lui F.

Acest lucru îl vom nota $F_n \xrightarrow{\omega} F$. Convergenţa punctuală va fi notată prin $F_n \xrightarrow{p} F$, iar mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei F prin $C(F)$.
Are loc:

TEOREMA 10.6. Fie $\{F_n\} \subset \Delta^+$ şi $F \in \Delta^+$. În acest caz $\mathscr{L}(F_n F) \to 0$, dacă şi numai dacă $F_n \xrightarrow{\omega} F$.

Demonstraţie. Fie $\mathscr{L}(F_n, F) \to 0$ şi $x \in C(F)$, iar $\varepsilon > 0$ arbitrar. În acest caz există $\delta > 0$ astfel că dacă $| x - y | < \delta$ să avem relaţia

$$| F(x) - F(y) | < \varepsilon.$$

Fie $h = \min\{\varepsilon, \delta, 1/|x|\}$ dacă $x \neq 0$ şi $h = \min(\varepsilon, \delta)$, dacă $x = 0$, iar $n \geqslant N$ astfel ca $\mathscr{L}(F_n, F) < h$. Dacă $|x| < 1/h$ din (1) şi (2) deducem că

$$F_n(x) \geqslant F(x - h) - h \geqslant F(x) - 2\varepsilon$$

şi

$$F_n(x) \leqslant F(x + h) + h \leqslant F(x) + 2\varepsilon$$

de unde rezultă că

$$F_n(x) \to F(x)$$

adică $F_n \xrightarrow{\omega} F$. Să presupunem acum că $F_n \xrightarrow{\omega} F$ şi deci pe o submulţime densă $D \subset R$ avem $F_n \xrightarrow{p} F$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar şi $a \in D$ astfel ca $a > \varepsilon + 1/\varepsilon$ iar

$$-a = a_2 < a_1 < \ldots < a_m = a_i,\ a_i \in D$$

şi astfel ca $|a_i - a_{i+1}| < \varepsilon$; $i = 1, \ldots, m$. Fie N un întreg astfel că dacă $n \geqslant N$ să avem

$$| F_n(a_i) - F(a_i) | < \varepsilon/2,\ i = 1, \ldots, m.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $-1/\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon + 1/\varepsilon$ sau $-\varepsilon - 1/\varepsilon \leqslant x \leqslant 1/\varepsilon$ atunci $x \in [-a, a]$ şi în fiecare caz există k astfel ca $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$ de unde rezultă că:

$$F_n(x) \leqslant F_n(a_k) \leqslant F(a_k) + \varepsilon/2 \leqslant F(x + \varepsilon) + \varepsilon/2$$

şi

$$F_n(x) \geqslant F_n(a_{k-1}) \geqslant F(a_{k-1}) - \varepsilon/2 \geqslant F(x - \varepsilon) - \varepsilon/2$$

adică au loc, $A(F, F_n, \varepsilon)$ şi $B(F, F_n, \varepsilon)$, rezultă că $\mathscr{L}(F_n, F) < \varepsilon$ adică $\mathscr{L}(F_n, F) \to 0$ şi teorema este demonstrată.

Din teorema de mai sus şi teorema lui Helly rezultă că are loc:

TEOREMA 10.7. Spaţiul metric $(\Delta^+, \mathscr{L})$ este compact.

Este evident că avem şi:

TEOREMA 10.8. Pentru orice $F, G \in \Delta^+$ avem

$$\mathscr{L}(F, G) \leqslant L(F, G).$$

Următorul exemplu dat de Sibley arată diferenţa între cele două metrici definite pe mulţimea Δ^+.

Fie θ funcţia identic nulă. Cum metricele $\mathscr{L}$ şi L sînt definite pe mulţimea funcţiilor crescătoare, continue la stînga, să punem

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant n \\ 1, & x > n \end{cases}$$

şi evident, cu definiţia convergenţei slabe avem

$$\mathscr{L}(S_n, \theta) = 1/n,$$

$$L(S_n, \theta) = 1$$

şi $S_n \xrightarrow{\omega} \theta$. Este uşor de remarcat că $(\Delta, \mathscr{L})$ nu este un spaţiu compact.

10.3. Metrica lui Lévy modificată şi t-norme

Un fapt important în teoria spaţiilor metrice şi în acelaşi timp uşor de demonstrat, este că distanţa (metrica) este o funcţie uniform continuă pe spaţiul produs. În mod natural se pune problema dacă, sau în ce fel, un fapt analog are loc pentru cazul spaţiilor metrice probabiliste.

Următoarele teoreme dau unele răspunsuri la o astfel de problemă.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 10.9. Dacă $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu metric probabilist de tip Menger cu t-norma T, avînd proprietatea

$$\lim_{x \to 1} T(a,x) = a$$

uniform pe [0,1], iar S este topologizat cu ((q,x)-topologia definită în mod standard), atunci $\mathcal{F}$

$$(p, q) \to F_{p0}$$

este uniform continuă de la $S \times S$ în Δ^+ unde Δ^+ are metrica lui Lévy L.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și cum $\lim_{x \to 1} T(x, a) = 1$ uniform, există λ astfel $T(a, 1 - \lambda) > a - \varepsilon/2$; $0 < \lambda < 1$, $\forall\, a \in [0,1]$.

Fie acum p,q arbitrari în S și $p' \in N_p(\varepsilon/2, \lambda)$ și $q' \in N_q(\varepsilon/2, \lambda)$. Deci avem relațiile

$$F_{pp'}(\varepsilon/2) > 1 - \lambda$$

$$F_{qq'}(\varepsilon/2) > 1 - \lambda$$

și, pentru orice $x \geqslant 0$ rezultă că

$$F_{p'q'}(x + \varepsilon) \geqslant T(F_{p'q}(x + \varepsilon/2),\ F_{qq'}(\varepsilon/2)) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(F_{pp'}(\varepsilon/2),\ F_{pq}(x)),\ F_{qq'}(\varepsilon/2) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(1 - \lambda,\ F_{pq}(x)),\ 1 - \lambda) \geqslant T(F_{pq}(x),\ 1 - \lambda)$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \geqslant F_{pq}(x) - \varepsilon,$$

de unde, pentru orice x

$$F_{pq}(x) < F_{p'q'}(x + \varepsilon) + \varepsilon.$$

În mod similar avem

$$F_{pq}(x) > F_{p'q'}(x - \varepsilon) - \varepsilon,$$

de unde rezultă că $L(F_{pq}, F_{p'q'}) < \varepsilon$ și deci avem continuitate în punctul (p,q), iar λ nedepinzînd decît de ε rezultă că avem în fapt continuitate uniformă. Teorema este demonstrată.

De aici rezultă imediat că are loc și :

TEOREMA 10.10. Dacă $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu Menger iar t-norma T este continuă, $\mathcal{F}$ este uniform continuă ; în particular dacă $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu Wald, $\mathcal{F}$ este uniform continuă.

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează vom expune rezultate privind metrica Lévy modificată. Vom considera $\Delta^\circ = \{F, F \in \Delta,\ F(0) = 0\}$ și τ_0 t-normă continuă, iar $\tau_T(F, G)$ definită prin $\tau_T(F, G, x) = \sup_{u+v=x,\ u,v\geqslant 0} T(F(u), G(v))$.

Are loc:

TEOREMA 10.11. Aplicația

$$(F,\ G) \to \tau_T(F,\ G)$$

este uniform continuă pe spațiul $(\Delta^\circ, \mathscr{L})$.

Demonstrație. Fie $F,\ G \in \Delta^\circ$ și $\varepsilon > 0$, iar $\delta > 0$ astfel că dacă $0 < \delta < \min(\varepsilon/2, \sqrt{2})$, atunci

$$|T(a + h, b + x) - T(a, b)| < \varepsilon/2,$$

cînd $|h| \leqslant \delta$ și $|h| \leqslant \delta$ uniform în $[0,1] \times [0,1]$. Dacă $F',\ G' \in \Delta^\circ$ și $\mathscr{L}(F', F) < \delta$, $\mathscr{L}(G, G') < \delta$ atunci pentru $u \in A_\delta = \left[\delta/2, \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right]$,

$$F'(u - \delta/2) - \delta/2 \leqslant F(u + \delta/2) + \delta/2,$$

$$F(u - \delta/2) - \delta/2 \leqslant F'(u + \delta/2) + \delta/2$$

și similar pentru G, G'. Cum T este nedescrescătoare în fiecare argument deducem că dacă $u,\ v \in A_\delta$, avem

$$T(F'(u - \delta/2) - \delta/2, G'(v - \delta/2) - \delta/2) \leqslant$$

$$\leqslant T(F(u + \delta/2) + \delta/2,\ G(v + \delta/2) + \delta/2),$$

de unde

$$T(F'(u - \delta/2),\ G'(v - \delta/2)) - \varepsilon/2 \leqslant T(F(u + \delta/2),$$

$$G(v + \delta/2)) + \varepsilon/2$$

și deci dacă $x \in A_\varepsilon$, pentru

$$W = \{(u, v);\ u + v = x,\ u \geqslant \delta/2, \geqslant \delta/2\},\ u, v \in A$$

deducem că

$$\sup_W T(F'(u - \delta/2), G'(v - \delta/2)) - \varepsilon/2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_W T(F(u + \delta/2),\ G(v + \delta/2)) + \varepsilon/2.$$

Cum $\delta < \min(\varepsilon/2, \sqrt{2})$ avem că $A_\varepsilon \subset A_\delta$ și deci pentru $x \in A_\varepsilon$

$$\{(u, v),\ u \geqslant \delta/2, v \geqslant \delta/2, u + v = x\} \Rightarrow u \in A_\delta,\ v \in A_\delta$$

și ultima relație ne dă că

$$\underset{u - \delta/2 \geqslant 0,\ v - \delta/2 \geqslant 0}{((u - \delta/2) + (v - \delta/2)} = x - \delta^{T(F'(u-\delta),\ G(v-\delta/2))} -$$

$$- \varepsilon/2 \leqslant \sup_{\substack{u + v = x \\ u \geqslant \delta/2,\ v \geqslant \delta/2}} T(F(u + \delta/2), G(v + \delta/2)) + \varepsilon/2.$$

Membrul stîng al acestei inegalități este chiar $\tau_T(F', G', x - \delta) - \varepsilon/2$ și cum

$$\{(u, v), u + v = x;\ u \geqslant \delta/2;\ v \geqslant \delta/2\} \subset \{(u, v);$$

$$u + \delta/2 + v + \delta/2 = x + \delta;\ u + \delta/2 \geqslant 0,\ v + \delta/2 \geqslant 0\},$$

rezultă că membrul drept este mai mic sau cel mult egal cu

$$\tau_T(F, G, x + \delta) + \varepsilon/2.$$

Cum pentru $\delta < \varepsilon/2$ și $x \in A_\varepsilon$ avem

$$\tau_T(F', G', -\varepsilon/2) - \varepsilon/2 \leqslant \tau_T(F, G, x + \varepsilon/2) + \varepsilon/2$$

și similar

$$\tau_T(F, G, x - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 \leqslant \tau_T(F', G', x + \varepsilon/2) + \varepsilon/2$$

rezultă că

$$\mathscr{L}(\tau_T(F, G), \tau_T(F', G')) < \varepsilon$$

dacă

$$\mathscr{L}(F, F') < \delta,\ \mathscr{L}(G, G') < \delta$$

și teorema este demonstrată. De aici rezultă imediat:

TEOREMA 10.12. Dacă T este o t-normă continuă, atunci τ_T este uniform continuă.

Demonstrație. Rezultă din teorema de mai sus și din faptul că (Δ°, L) este un spațiu metric.

Are loc și:

TEOREMA 10.13. Pe spațiul $(\Delta^\circ, \mathscr{L})$ aplicația

$$(F, G) \to F \otimes G$$

este continuă (ca funcție de două variabile).

Demonstrație. Fie $F, G \in \Delta^+$ și $\varepsilon > 0$; iar $\delta > 0$ astfel ca $0 < \delta < \min\left(\varepsilon/2, \sqrt{2}, \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right)$ cu $\mathscr{L}(F, F') < \delta, \mathscr{L}(G, G') < \delta$ unde $F', G' \in \Delta^+$. Fie $x \in A_\varepsilon$. Din $x - \delta/2 \geqslant \varepsilon/2 - \delta/2 > \delta - \delta/2 = \delta/2$, rezultă că $x - \delta/2 - y \in A_\delta$ dacă $0 \leqslant y \leqslant x - \delta$. În acest caz avem:

$$(F \otimes G)(x - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 \leqslant (F \otimes G)(x - \delta) - \delta =$$

$$= \int_0^{x-\delta} F(x - \delta - y)\, dG(y - \delta \leqslant \int_0^{x-\delta} \{F(x - \delta/2 - \delta/2 - y) - \delta/2\} dG(y) -$$

$$- \delta/2 \leqslant \int_0^{x-\delta} \{F(x - \delta/2 + \delta/2 - y) + \delta/2\}\, dG(y) - \delta/2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{x-\delta} \{F(x - y)\, dG(y) \leqslant \int_0^{x} \{F'(x - y)\, dG(y) = (F' \otimes G)(x) =$$

$$= (G \otimes F')(x) = \int_0^x G(x - y)\, dF'(y).$$

Cum $x \in A_\varepsilon$ și $\delta < \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$ avem

$$x + \delta/2 \leqslant 1/\varepsilon + \varepsilon/2 = \delta/2 < \frac{2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} + \delta/2 < 1/\delta + \frac{\delta}{2}$$

și deci

$x + \delta/2 - y$ este în A_δ dacă $0 \leqslant y \leqslant x$. Deci avem

$$\int_0^x G(x - y)\, dF'(y) = \int_0^x G(x + \delta/2 - \delta/2 - y)\, dF'(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x \{G'(x + \delta/2 + \delta/2 - y) + \delta\}\, dF'(y) \leqslant \int_0^x G'(x + \delta - y)\, dF'(y) +$$

$$+ \delta \leqslant \int_0^{x+\delta} G'(x + \delta - y)\, dF'(y) + \delta = (G' \otimes F')(x + \delta) +$$

$$+ \delta \leqslant (G' \otimes F')(x + \varepsilon/2) + \varepsilon/2$$

adică are loc $A(F \otimes G, F' \otimes G', \varepsilon)$. Analog se stabilește că $B(F \otimes G, F' \otimes G', \varepsilon)$ are loc și în acest mod obținem că

$$\mathscr{L}(F \otimes G, F' \otimes G) < \varepsilon,$$

de unde rezultă teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Vom remarca faptul că din această teoremă rezultă imediat că produsul de convoluţie este o funcţie continuă de două variabile în raport cu convergenţa slabă. Aceasta rezultă imediat din relaţia

$$L(F, G) \geqslant \mathscr{L}(F, G).$$

Să observăm că pe mulţimea funcţiilor crescătoare continue la stînga şi cu valori în [0,1], convoluţia nu este continuă în sensul considerat mai sus. În adevăr, fie

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant n \\ 1, & x > n \end{cases} \text{ şi } G_n = 1/2.$$

În acest caz avem că $G_n \otimes F_n = 1/2$ şi $F_n \xrightarrow{\omega} 0$ iar $G_n \xrightarrow{\omega} G = 1/2$. Dar $G \otimes F = 0$ şi deci $G_n \otimes F_n \nrightarrow G \otimes F$.

Vom remarca de asemenea un fapt şi anume că, dîndu-se o funcţie T care este t-normă cu ajutorul ei putem defini o funcţie pe $\Delta^+ \times \Delta^+$ şi anume

$$\pi_T(F, G, x) = T(F(x), G(x)),$$

care după cum se poate verifica este o funcţie triunghiulară.

10.4. Două teoreme de convergenţă ale lui O. Onicescu

Vom prezenta acum două teoreme de convergenţă pentru şiruri de funcţii de repartiţie datorate prof. O. Onicescu. Vom menţiona o problemă care credem că este interesantă în legătură cu aceste teoreme şi anume: este posibilă metrizarea acestor convergenţe? Demonstraţia care urmează este datorită prof. O. Onicescu.

TEOREMA 10.14. Dacă $\{F^{(n)}\}_1^\infty$ este un şir de funcţii de repartiţie şi F este de asemenea o funcţie de repartiţie astfel încît:

1° corespund unui număr finit de stări m,

2° oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ şi N_ε cu proprietatea că

$$\delta(F^{(n)}, F) = 1 - r^2(F^{(n)}, F) = \frac{\sum_{s,l} (p_j p_l - p_l^{(n)} p_j)^2}{\sum p_j^{(n)2} \sum p_j^2} < \varepsilon,$$

dacă $n \geqslant N_\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $|p_j^{(n)} - p_j| < \varepsilon$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, dacă $n \geqslant N_\varepsilon$.

Demonstrație. Din proprietatea 2° rezultă, pentru $\varepsilon > 0$ dat, și $n \geqslant N_\varepsilon$ că

$$\sum_{j,\,l} (p_j^{(n)} p_l - p_l^{(n)} p_j)^2 \leqslant \varepsilon$$

de unde

$$-\sqrt{\varepsilon} \leqslant p_j^{(n)}\, p_l - p_l^{(n)}\, p_j \leqslant \sqrt{\varepsilon} \quad \forall j = 1,2,3, \ldots, m.$$

De aici rezultă că

$$-m\sqrt{\varepsilon} \leqslant \sum_{l=1}^{m} (p_j^{(n)} p_l - p_l^{(n)} p_j) \leqslant m\sqrt{\varepsilon}$$

sau

$$-m\sqrt{\varepsilon} \leqslant p_j^{(n)} - p_j \leqslant m\sqrt{\varepsilon}.$$

Vom observa că relația $|p_j^{(n)} - p_j)| \leqslant \varepsilon$ este adevărată dacă $n \geqslant N\left(\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)$ și teorema este demonstrată.

Pe mulțimea funcțiilor de repartiție $\mathscr{F}_m$ corespunzînd unui număr finit de stări m, teorema de mai sus, sugerează introducerea unei topologii în modul următor : pentru $F \in \mathscr{F}_n$ să punem

$$\sqrt{\varepsilon}(F) = \{G,\ G \in \mathscr{F}_m,\ 1 - r^2(F, G) < \varepsilon\},$$

unde $\varepsilon > 0$ și să numim aceste mulțimi vecinătăți lui F. Se poate arăta că în acest mod avem o topologie pe $\mathscr{F}_m$.

Apare în mod natural problema, dacă teorema 10.13 poate fi extinsă la alte clase de funcții de repartiții. Teorema următoare dă un răspuns afirmativ la această problemă.

TEOREMA 10.15. Dacă $\{F^{(n)}\}$ este un șir de funcții de repartiție unde fiecare $F^{(n)}$ are densitatea $\rho^{(n)}$, care este o funcție continuă iar F o funcție de repartiție cu densitatea ρ are proprietățile : pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, astfel ca

$$1 - r^2(F^{(n)}, F) \leqslant \eta \qquad (10.14.1)$$

dacă $n \geqslant N_\varepsilon$. În acest caz $|\rho^n(x) - \rho(x))| < \varepsilon$ aproape peste tot dacă $n \geqslant N_\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Prin definiție

$$1 - r^2(F^{(n)}, F) = \frac{\iint R_n^2(x, y)\,dx\,dy}{\int \rho^{(n)2}(x)\,dx \int \rho^2(x)\,dx}$$

cu $R_n(x) = \rho^{(n)}(x)\,\rho(x) - \rho^{(n)}(x)\,\rho(y)$. Din proprietatea dată rezultă că energiile *informaționale* $\left\{\int \rho^{(n)2}(x)\,dx\right\}$ formează un șir mărginit. În adevăr din relația (10.11.1) rezultă că

$$\int \rho^{(n)2}(x)\,dx \int \rho^2(x)\,dx - \left[\int \rho^{(n)}(x)\,\rho(x)\,dx\right]^2 \leqslant \frac{\eta}{2} \int \rho^{(n)2}\,dx \int \rho^2(x)\,dx$$

de unde

$$\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \int \rho^{(n)2}(x)\,dx \int \rho^2(x)dx \leqslant \sup_{t \in (-\infty, \infty)} \rho^2(t)$$

și deci

$$\int \rho^{(n)2}(x)\,dx \leqslant \frac{4}{3} \sup_{t \in (-\infty, \infty)} \rho^2(x)$$

presupunînd că $n \in (0,1/2)$.

În acest mod obținem că

$$\lim \iint R_n^2(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

de unde rezultă că $\lim \int R_n(x, y)\,dy = \lim (\rho^{(n)}(y) - \rho(y))$ există și este o funcție în clasa 0, adică nulă aproape peste tot.

Fiind dat $\varepsilon > 0$, există N_ε, astfel ca

$$|\rho^{(n)}(x) - \rho(x)| < \varepsilon,$$

dacă $n \geqslant N_\varepsilon$ în afara unei mulțimi de măsură nulă și deci $F_n \to F$. Teorema este astfel demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

11 Aplicaţii ale teoriei spaţiilor metrice probabiliste

După cum am arătat, noţiunea de spaţiu metric a fost extinsă la ceea ce numim astăzi spaţiu metric probabilist (pe scurt *PM*-spaţiu) de către Karl Menger în 1942. În lucrarea sa, K. Menger a indicat diferite posibilităţi de aplicare a teoremei metricilor probabiliste :

1) o metodă de a înlătura unele dificultăţi din fizica macroscopică şi transferarea lor într-o geometrie adecvată ;

2) o tratare a pragurilor de la senzaţii eliminînd paradoxurile teoriei clasice.

În cele ce urmează vom arăta că previziunile făcute de K. Menger au devenit o realitate şi anume, s-a reuşit să se dea o aplicaţie foarte interesantă a teoriei spaţiilor metrice probabiliste în fizică, unde previziunile teoriei concordă foarte bine cu datele experimentale.

În altă ordine de idei, vom arăta că unele inegalităţi din teoria funcţiilor speciale se pot obţine cu ajutorul teoriei fondate de K. Menger.

11.1. Fenomenul de hysterezis

Termenul de hysterezis a fost utilizat de fizicianul englez J. A. Ewing în anul 1880 pentru a descrie variaţiile magnetizării unui magnet atunci cînd cîmpul magnetic extern are variaţii. Ewing a studiat în special cazul substanţelor feromagnetice, substanţe a căror caracteristică fundamentală este curba de magnetizare, curbă care reprezintă grafic funcţia care ne dă momentul magnetic ca funcţie de cîmpul magnetic exterior. Studiind aceste sisteme, Ewing a fost condus la fundarea fenomenologică a fenomenului de hysterezis la materialele feromagnetice. Mai tîrziu s-a remarcat şi

Scanned with OKEN Scanner

faptul că există sisteme materiale care pot prezenta un fenomen similar și care să nu aibă nimic în comun cu magnetismul. Vom menționa aici fenomenul de hysterezis „stress-strain" (fenomenul de hysterezis apăsare-încordare), fenomenul de hysterezis de tranziție ordine-dezordine în aliaje etc.

Este de observat că deși în descrierea acestor fenomene este folosită o terminologie comună nu există o teorie generală a fenomenului de hysterezis. Acest lucru a fost făcut de fizicienii Erber, Guralnick și Latal în articolul foarte important [90]. Menționăm că un rol important în construcția acestei teorii l-a avut lucrarea [80] a lui Erber, Schweizer și Scalar unde pentru prima dată se dă modelul matematic cu ajutorul teoriei spațiilor metrice probabiliste.

Vom mai da acum cîteva observații privind fenomenul de hysterezis la diferite sisteme materiale.

Astfel s-a observat că există un regim relativ mic de perturbații ale unei variabile exterioare astfel încît schimbările în sistem corespunzătoare sînt reversibile și nici un fel de energie nu este împrăștiată. Acest regim este întotdeauna mărginit de un prag critic peste care schimbările devin dependente de cele dinainte și apar pierderi de energie.

Este cunoscut că, în general, după un mare număr de variații ciclice, dependența despre care s-a vorbit mai sus se strînge și comportarea sistemului este ciclică. Aceasta reprezintă regimul de hysterezis asimptotic. Pierderea de energie în regim de hysterezis asimptotic poate fi măsurată suficient de precis. S-a constatat astfel că exponentul puterii în legea care dă pierderea de energie, atît la materialele feromagnetice cît și la fenomenul de hysterezis apăsare-încordare, este foarte aprope de 3, iar la alte tipuri de sisteme variază între 1 și 3. (Acest exponent se mai numește și indicele de hysterezis). Fenomenul de hysterezis asociat configurației unui dipol magnetic montat pe *o tijă* deformabilă poate fi studiat în detaliu, deoarece interacțiunile elementare sînt numai suprapuneri de forțe dipolare și că trecerea sistemului de la starea de stabilitate la cea de instabilitate are loc în acele puncte unde matricea hessiană este singulară. Acest punct de vedere a fost extins de Erber, Guralinck și Latal la o teorie generală a fenomenului de hysterezis. Așa după cum au remarcat acești autori, este suficient de greu, dacă nu imposibil, de a calcula matricea hessiană (a forțelor despre care am vorbit mai sus) și atunci s-a căutat un alt punct de vedere care să permită construirea unei teorii care să concorde foarte bine cu experiențele. S-a presupus astfel că sistemul este suficient de mare sau suficient de complicat pentru a avea o anumită regularitate probabilistă și aceasta s-a reflectat în considerarea Hamiltonienilor stochastici care

au permis definirea unor spaţii metrice probabiliste. S-a observat astfel că legile de pierdere ale energiei sînt simple corolare ale unor teoreme generale, valabile în teoria generală a fenomenului de histerezis construită cu ajutorul spaţiilor metrice probabiliste.

11.2. Spaţii metrice probabiliste şi fenomenul de hysterezis

Ideea de a considera spaţii metrice probabiliste are la bază următorul model : să presupunem că avem o particulă care parcurge diferite curbe într-un spaţiu metric în care avem şi o măsură. Fie p şi q două puncte din spaţiu şi R mulţimea din spaţiu acoperită cu curbele care trec prin p şi q care nu depăşesc ca lungime pe x. Să presupunem că R este măsurabilă şi în acest caz putem lua măsura lui R (în raport cu o mulţime fixă) ca fiind probabilitatea ca distanţa între p şi q să nu depăşească numărul x pentru particula în consideraţie. Este evident că în acest mod sîntem conduşi să considerăm spaţii metrice probabiliste.

Să presupunem că avem un spaţiu metric $(\mathscr{X}, \rho)$.

DEFINIŢIA 11.1. Dacă p şi q sînt două puncte în spaţiul metric $\mathscr{X}$ şi x un număr real atunci elipsa închisă de focare p şi q şi cu axa mare x va fi prin definiţie mulţimea

$$E(p, q, x) = \{r, r \in \mathscr{X},\ d(p, r) + d(r, q) \leqslant x\}.$$

Evident că $E(p, q, x)$ este mulţimea vidă dacă $x < d(p, q)$ şi dacă $x > d(p, q)$ atunci $E(p, q, x)$ conţine cel puţin două puncte.

Are loc :

TEOREMA 11.2. Fie $(\mathscr{X}, \rho)$ un spaţiu metric cu proprietatea că pentru orice două puncte există segmente care le unesc. Fie p, q în $\mathscr{X}$ şi x un număr real, $A(p, q, x)$ mulţimea acelor puncte $r \in \mathscr{X}$ astfel ca r se află pe un arc cu capetele în p şi q, iar lungimea arcului nu depăşeşte pe x. În acest caz :

$$A(p, q, x) = E(p, q, x).$$

Demonstraţie. Dacă $x < d(p, q)$ atunci $A(p, q, x)$ este vidă şi egalitatea este evidentă în acest caz. Dacă $x \geqslant d(p, q)$ atunci mulţimile sînt nevide şi fie $r \in A(p, q, x)$. Fie α arcul pe care se află r deci $l(\alpha)$,

Scanned with OKEN Scanner

lungimea sa nu depăşeşte x. Cum însă din definiţia lungimii $l(\alpha)$ rezultă că $l(\alpha) \geqslant d(p, r) + d(r, q)$ şi cum $l(\alpha) \leqslant x$ rezultă că $r \in E(p, q, x)$. Să arătăm acum că orice punct din $E(p, q, x)$ este în $A(p, q, x)$. În adevăr, segmentele care unesc pe p cu r, $s(p, r)$ şi r cu q, $s(r, q)$ formează un arc şi din definiţia lungimii arcului rezultă

$$l(s(p, r)) + l(s(r, q)) = l(\text{arc}(p, r, q)) \leqslant l(p, r) + d(r, q) \leqslant x$$

şi deci $r \in A(p, q, x)$. Teorema este astfel demonstrată.

DEFINIŢIA 11.3. Un spaţiu metric $(\mathcal{X}, \rho)$ se spune că este admisibil dacă următoarele condiţii sînt satisfăcute :

1. oricare ar fi $p, q \in \mathcal{X}$ există segmente care unesc aceste puncte,
2. există o măsură μ definită pe o parte din submulţimile lui X astfel ca orice elipsă să fie măsurabilă,
3. oricare ar fi $p, q \in \mathcal{X}$ şi x în R astfel ca $x > d(p,q)$ avem că

$$0 < \mu(E(p, q\, x)) < +\infty.$$

Vom reaminti acum o clasă de funcţii în teoria spaţiilor metrice probabiliste.

DEFINIŢIA 11.4. Prin Δ_d^+ vom înţelege mulţimea funcţiilor F definite pe axa reală R, crescătoare, continue la dreapta şi cu proprietatea că :

1. $F(x) = 0, \quad x < 0,$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Vom remarca faptul că în teoria spaţiilor metrice probabiliste s-a utilizat mulţimea Δ_s^+, a funcţiilor continue la stînga. Pentru clasa de mai sus teoria este perfect analoagă. Evident, printre funcţiile în Δ_d^+ există şi funcţia

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geqslant a \end{cases}$$

şi dacă $F \in \Delta_d^+$ atunci

$$F^{(x)}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ F(t) - F(x) + 1 & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 1 & t \geqslant x. \end{cases}$$

Are loc următoarea teoremă, care se poate demonstra printr-un calcul simplu.

TEOREMA 11.5. Dacă $F \in \Delta_d^+$ și $x \in R_+$ atunci

$$\int_0^\infty t \, dF^{(x)}(t) = \int_0^x t \, dF^{(x)}(t) = \int_0^x t \, dF(t) - xF(x) - \int_0^x F(t) \, dt.$$

Reamintim, de asemenea, definiția spațiilor metrice probabiliste simple generate de funcția G.

DEFINIȚIA 11.6. Dacă $(\mathscr{X}, q)$ este un spațiu metric și G este o funcție de repartiție cu proprietatea că :

1. $G(0) = 0$,
2. G este crescătoare și continuă la dreapta,
3. $\lim\sup_{x \to \infty} G(x) = 1$.

În acest caz $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ este un spațiu metric probabilist, unde :

$$(p, q) \to F_{pq}(x) = \begin{cases} \varepsilon_0(x), & p = q, \\ G(x/d(p, q)) & p \neq q. \end{cases}$$

Se poate arăta ușor că oricare ar fi p, q, r într-un spațiu metric probabilist, are loc relația :

$$F_{pr}(x + y) \geqslant \min(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$$

oricare ar fi x, y în R_+.

Să presupunem acum că $(\mathscr{X}, \rho)$ este un spațiu metric admisibil în sensul definiției 11.2. În acest caz putem defini pe $\mathscr{X}$ o structură de spațiu metric probabilist prin corespondența

$$(p, q) \to F_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(E(p, q, x))}{\mu(x)}, & p = q, \\ \varepsilon_0(x), & p \neq q. \end{cases}$$

Vom remarca faptul că nu putem defini o structură de spațiu metric probabilist pe $\mathscr{X}$ dacă $\mu(x) = +\infty$. Următorul exemplu arată că, uneori chiar, în cazul cînd $\mu(x) < \infty$ procedeul de mai sus nu este indicat.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\mathscr{X}$ sfera de rază ρ şi d distanţa între două puncte ale sferei, distanţă luată pe cercurile mari ale sferei, iar μ măsura Lebesque şi deci $\mu(x) = 4\pi\rho^2$. Fie p un punct arbitrar pe o sferă şi $\{p_n\}$ un şir de puncte distincte pe sferă care converge către p. În acest caz:

$$E(p, p_n, x)$$

converge către un disc de rază $x/2$ şi arie $4\pi\rho^2 \sin^2(x/4\rho)$ şi deci:

$$\lim_{p_n \to p} F_{pp_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ \sin^2(x/4\rho) & 0 \leqslant x \geqslant 2\pi\rho, \\ 1 & x \geqslant 2\pi\rho. \end{cases}$$

Dar cum $F_{pp}(x) = \varepsilon_0(x)$ deducem că $\lim F_{pnp} \neq F_{pp}$ şi deci funcţia $\mathscr{F}$ din $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ nu este continuă.

Următoarea metodă de a defini o structură de spaţiu metric probabilist pe $\mathscr{X}$ este sugerată tot de considerente fizice.

Să presupunem că avem o particulă şi p, q două puncte fixe din $\mathscr{X}$ care se mişcă pe diferite curbe care trec prin p şi q. Este natural să presupunem că dacă x depăşeşte un anumit multiplu de distanţa $d(p, q)$ atunci particula care a plecat din p se găseşte în punctul q.

Această presupunere înseamnă că există întregul m astfel că dacă $x \geqslant m\, d(p, q)$ atunci $F_{pq}(x) = 1$.

Putem acum defini structura de spaţiu metric probabilist pe $\mathscr{X}$ în:

DEFINIŢIA 11.7. Fie $(\mathscr{X}, \rho)$ un spaţiu metric admisibil cu măsura μ şi $m > 1$ fix. Prin m-metrică pe $(\mathscr{X}, \rho, \mu)$ se înţelege aplicaţia:

$$(p, q) \to F_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(E(p, q, x))}{\mu(E(p, q, m\rho(p, q))} & x \leqslant m\ \rho(p, q),\ p \neq q \\ 1 & x \geqslant m\ \rho(p, q),\ p \neq q, \\ \varepsilon_0(x) & p = q \end{cases}$$

şi în acest mod avem o structură de spaţiu metric probabilit pe $\mathscr{X}$. Se poate verifica uşor că această metrică probabilistă nu mai prezintă dezavantajul semnalat mai sus; are loc afirmaţia:

$$p \to q \Rightarrow F_{pq} \to \varepsilon \text{ şi } F_{pq} \Rightarrow \underset{\rho(p,q)}{\varepsilon_1} \text{ dacă } m \to \infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cele mai multe spații admisibile se poate întîmpla ca măsura elipsei metrice depinde numai de lungimea axei mari a elipsei și de distanța între focare, adică are loc relația

$$\mu(E(p, q, x)) = F(x, \rho(p, q)),$$

unde F este o funcție definită pe $R \times R$. Uneori funcția F poate avea forma

$$F(x, \rho(p, q)) = g(x/\rho(p,q)) \cdot h(\rho(p,q)),$$

unde g, h sînt funcții de o variabilă. Funcția g trebuie să fie nedescrescătoare și $g(t) > 0$ oricare ar fi $t > 1$. Cu ajutorul acestei funcții putem defini o funcție $G \in \Delta_d^+$ prin

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{g(x)}{g(m)}, & 0 \leqslant x \leqslant m, \\ 1, & x \geqslant m, \end{cases}$$

și în acest caz structura de spațiu metric probabilist pe x nu este alta decît spațiul metric probabilist simplu construit cu funcția G.

Să presupunem acum că $\mathcal{X} = R \times R$, planul euclidian, iar μ măsura Lebesque. În acest caz:

$$\mu(E(p, q, x)) = \frac{\pi}{4} x (x^2 - \rho(p,q)^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x}{\rho(p,q)} \{[x/\rho(p,q)]^2 - 1\}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{4} \rho(p,q)^2$$

oricare ar fi $x \geqslant \rho(p, q)$. Aici ρ este metrica euclidiană pe $R \times R$. Este evident că funcțiile F, g, h, de mai sus sînt respectiv

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & y \geqslant 0, \ x \leqslant y, \\ \dfrac{\pi}{4} x(x^2 - y^2), & x \geqslant y \geqslant 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} y^2, & y \geqslant 0. \end{cases}$$

Din cele de mai sus rezultă imediat că are loc:

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 11.8. Fie $(\mathscr{X}, \rho)$ planul euclidian şi μ măsura Lebesque, iar $m > 1$; în acest caz structura de spaţiu metric probabilist pe $\mathscr{X}$ poate fi dată cu ajutorul funcţiei G definită prin:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{m}\left(\dfrac{x^2-1}{m^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}, & 1 \leqslant x \leqslant m, \\ 1, & x \geqslant m \end{cases}$$

şi deci metrica probabilistă pe $\mathscr{X}$ are forma:

$$(p, q) \to F_{pq}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \rho(p, q), \\ \dfrac{x}{m\,\rho(p,q)^2}\left(\dfrac{x^2-\rho^{(p,q)^2}}{m^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} & \rho(p,q) \leqslant x \leqslant m\,\rho(p,q) \\ 1, & x \geqslant m\,\rho(p,\,q). \end{cases}$$

Din această teoremă şi din teorema 11.4. deducem:

TEOREMA 11.9. Dacă F_{pq} sînt cele date în teorema 11.7, atunci oricare ar fi $x \geqslant 0$

$$\int_0^\infty t\,\mathrm{d}F_{p,q}^{(x)}(t) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \rho(p, q), \\ (2x^2+\rho(p,q)^2)\,(x^2-\rho(p,\,q)^2)^{\frac{1}{2}}, & \rho(p,q) \leqslant x \leqslant m\,\rho(p,q), \\ \dfrac{2m^2+1}{3m}\cdot\rho(p,\,q), & x \geqslant m\,\rho(p,q). \end{cases}$$

Vom remarca faptul că în aplicaţii intervin şi alte clase de spaţii în care metrica are forme interesante şi acestea sînt, de exemplu, spaţiile Minkovski.

Următoarea teoremă este similară cu cea de mai sus şi se referă la spaţiile euclidiene n-dimensionale.

TEOREMA 11.10. Fie $(\mathscr{X}, \rho)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi μ măsura Lebesgue n-dimensională, iar $m > 1$. În acest caz o structură de spaţiu metric probabilist simplu poate fi construită pe $\mathscr{X}$ cu ajutorul funcţiei:

$$G_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{x}{m}\left[\dfrac{(x^2-1)}{(m^2-1)}\right]^{n-1/2}, & 1 \leqslant x \leqslant m, \\ 1, & m \leqslant x. \end{cases}$$

Să considerăm acum cazul cînd avem matrici de tip **Minkovski** și anume :

$$d_\lambda((\xi_1,\ \eta_1),(\xi_2,\ \eta_2)) = \begin{cases} (|\ \xi_1 - \xi_2|^\lambda + |\ \eta_1 - \eta_2\ |^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}};\ \lambda \in [1,\infty] \\ \max\{|\ \xi_1 - \xi_2|\ ,\ |\ \eta_1 - \eta_2\ |\} \qquad \lambda = \infty. \end{cases}$$

Se poate arăta că se poate construi o măsură μ_λ, analogul măsurii Lebesque, care este cea mai naturală posibilă și că există k_λ, o constantă pozitivă astfel încît

$$\mu_\lambda = k_\lambda\ \mu_2,$$

unde μ_2 este măsura Lebesque în plan. Următoarea figură arată forma elipsei pentru cazul spațiului cu metrica d_1 (figura 1).

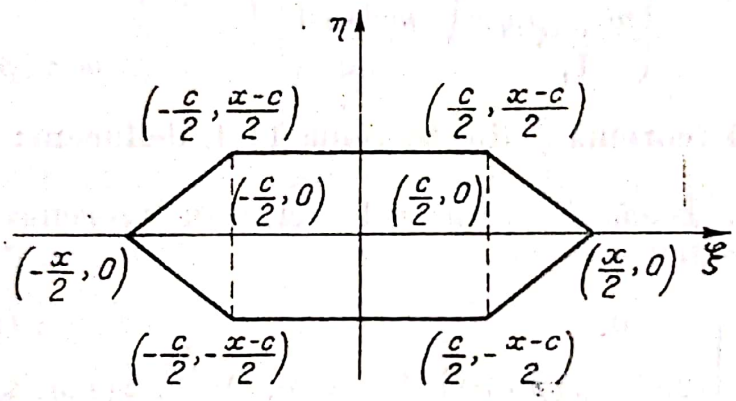


Fig. 1

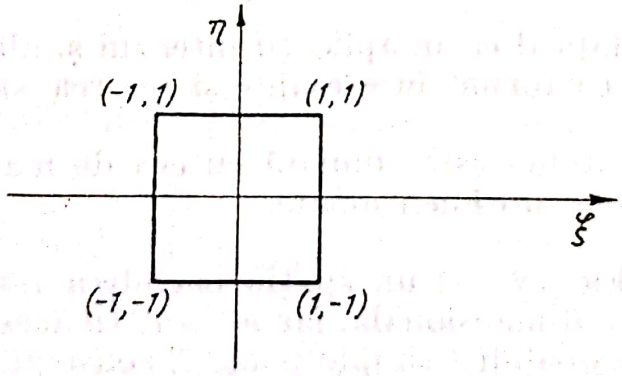


Fig. 2

Sfera unitatea a spațiului cu metrica d_∞ este un pătrat, de latură 2 (figura 2).

Ținînd seama că aria elipsei este egală cu $\frac{1}{2}(x^2 - d_1(p,\ q)$ are loc :

Teorema 11.11. Fie $(\mathscr{X}, d_1)$ un spațiu Minkovski 2-dimensional și μ_1 măsura naturală de care a fost vorba mai sus, iar p, q puncte arbitrare în $\mathscr{X}$. În acest caz o structură de spațiu metric probabilist simplu pe $\mathscr{X}$ poate fi construită punînd:

$$(p, q) \to F_{pq}(x) = G_1(x/d_1(p, q))$$

unde:

$$G_1(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 1, \\ \dfrac{x^2 - 1}{m^2 - 1}, & 1 \leqslant x \leqslant m, \\ 1, & m < x, \\ 0, & x \leqslant d_1(p, q) \end{cases}$$

și

$$\int_0^\infty t\, dF_{pq}^{(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \dfrac{x^3 - d_1(p, q)^3}{d_1(p, q)^2 (m^2 - 1)}, & d_1(p, q) \leqslant x \leqslant m d_1(p, q) \\ \dfrac{2}{3} \dfrac{m^2 + m + 1}{m + 1} d_1(p, q), & x \geqslant m d_1(p, q). \end{cases}$$

În cazul cînd avem metrica d_∞ are loc:

Teorema 11.12. Fie $(\mathscr{X}, d_\infty)$ un spațiu Minkovski 2-dimensional și μ_∞ măsura corespunzătoare, iar p, q puncte arbitrare în $\mathscr{X}$ astfel ca dreapta care trece prin p și q este paralelă cu una din axe. În acest caz o structură de spațiu metric probabilist pe $\mathscr{X}$ este dată prin

$$(p, q) \to F_{pq}(x) = G_\infty(x/d_\infty(p, q))$$

unde

$$G_\infty(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{2x^2 - 1}{2m^2 - 1}, & 1 \leqslant x \leqslant m \\ 1, & x \geqslant m \end{cases}$$

și în acest caz are loc relația:

$$\int_0^\infty t\, dF_{pq}^{(x)}(t) = \begin{cases} 0, & x \leqslant d_\infty(p, q), \\ \dfrac{4x^3 - d_\infty^3(p, q)}{3\, d_\infty(p, q)^2 (2m^2 - 1)}, & d_\infty(p, q) \leqslant x \leqslant m d_\infty(p, q) \\ \dfrac{1}{3} \dfrac{4m^3 - 1}{2m^2 - 1} d_\infty(p, q), & x \geqslant m\, d_\infty(p, q). \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele obținute pînă acum permit să dăm o teorie a fenomenului de hysterezis. Vom preciza acum condițiile în care putem aplica rezultatele precedente. Vom presupune că sistemul fizic poate fi reprezentat ca o mulțime de puncte într-un spațiu al fazelor, de dimensiune suficient de mare și că în unele cazuri anumite spații pot fi înlocuite cu altele de dimensiune mai mică. În cele ce urmează vom considera sisteme a căror comportare poate fi descrisă, în mod practic, printr-un singur parametru și acest parametru va fi numit și „coordonată de configurație" ce va fi notată cu ξ.

Agenții externi care induc fenomenul de hysterezis constituie un mare număr de parametri. Pentru teoria pe care o expunem, vom presupune că sistemul are proprietatea că agenții externi pot fi descriși numai cu ajutorul unui parametru care va fi numit și coordonată hysterezis și va fi notată cu η. Sistemele a căror comportare poate fi descrisă cu ajutorul celor două coordonate ξ și η vor fi numite sisteme hysterezis simple. Vom considea punctul (ξ, η) și cînd η variază vom avea o curbă, iar fenomenul de hysterezis înseamnă că dacă η se întoarce la valoarea sa inițială atunci punctul ξ corespunzător diferă de ξ de la valoarea inițială. Un ciclu hysterezis va fi prin urmare o curbă în planul (ξ, η) de la un punct p la altul q astfel ca :

1. $\eta(p) = \eta(q)$,
2. $\xi(p) \neq \xi(q)$.

Pentru a aplica teoria expusă mai sus, vom mai face următoarele presupuneri, inspirate atît de considerente fizice cît și de considerente de comoditate :

1° pentru fiecare perioadă a sistemului în regim de hysterezis există o metrică ρ a planului (ξ, η) care-l transformă într-un spațiu metric și ρ este invariantă la translații și la simetria față de axa η ;

2° pentru fiecare perioadă a sistemului în regim de hysterezis, distanța dintre punctul inițial și cel final la orice ciclu de hysterezis este constantă;

3° orice ciclu hysterezis este un arc rectificabil;

4° pierderea de energie într-un ciclu hysterezis este proporțională cu lungimea ciclului, dacă lungimea ciclului nu depășește un anumit multiplu (fix) al distanței $\rho(p, q)$;

5 există o măsură μ astfel încît planul (ξ, η) cu metrica ρ este un spațiu metric admisibil ;

6° media pierderii de energie într-un ciclu hysterezis, pentru cicluri a cărui lungime nu depășește numărul x este proporțională cu

$$\int_0^x t\,dF_{pq}^{(x)}(t).$$

După cum știm x este axa mare a elipsei metrice înăuntrul căreia este permis ciclul hysterezis și este evident că, din punct de vedere fizic, aceasta se datorește faptului că ea corespunde variației maxime permise pentru coordonata ξ într-un ciclu hysterezis. Vom remarca că, tot din considerente fizice ne va interesa maximul coordonatei hysterezis η, care, evident, va fi axa mică y a elipsei metrice (care depinde de metrica ρ și de asemenea depinde de măsura μ).

În cazul cînd avem planul euclidian (ξ, η) și măsura μ = măsura Lebesque, cum $x = (y^2 + \rho\ (p,\ q)\ )^{1/2}$, deducem că

$$\int_0^\infty t\, \mathrm{d}\, F_{pq}^{(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{2\,y^3 + 3\,\rho(p,\,q)^2 y}{3\,\rho(p,\,q)^2\, m(m^2-1)^{1/2}}\, y \leqslant (m^2-1)^{1/2}\rho\,(p,\,q), \\ \dfrac{2m^2+1}{3\,m}\,\rho(p,\,q),\ y \geqslant (m^2-1)^{1/2}\,\rho(p,\,q) \end{cases}$$

În cazul cînd (ξ, η) este în spațiul Minkovski $(\mathfrak{X},\ d_1)$ atunci $x = y + d(p, q)$ și deci

$$\int_0^\infty t\, \mathrm{d}\, F_{pq}^{(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{2/3y^3 + d_1(p,\,q)^{3/2}y + 3d_1(p,\,q)^2 y}{d_1(p,\,q)^2\ (m^{\,2}-1)}, y \leqslant (m-1)\, d_1\,(p,q) \\ \dfrac{2}{3}\ \dfrac{m^2+m+1}{m+1}\ d_1(p,\,q),\ y \geqslant (m-1)\ d_1\,(p,\,q). \end{cases}$$

De asemenea în cazul cînd avem d_∞, $y = x$ și

$$\int_0^\infty t\, \mathrm{d}\, F_{pq}^{(x)}(t) = \begin{cases} 0, & y < d_\infty\,(p,\,q), \\ \dfrac{4y^3 - d_\infty\,(p,\,q)^3}{3d_\infty(p,\,q)^2\,(2m^2-1)}, & d_\infty(p,\,q) \leqslant y \leqslant m\,d_\infty(p,\,q), \\ \dfrac{1}{2}\ \dfrac{4\,m^3-1}{2\,m^2-1}\,d_\infty(p,\,q), & x \geqslant m d_\infty(p,\,q), \end{cases}$$

Importanța formulelor obținute (pag. 231) rezidă în forma lor care arată că trebuie să existe o dependență polinomială între media pierderii de energie și maximul coordonatei hysterezis. Vom remarca faptul că dacă $m \gg 1$, atunci în toate cazurile avem dependen-

denţă cubică. De asemenea dacă $y \geqslant d_*(p, q)$ unde * poate lua valorile 1, 2, ∞ atunci

$$\int_0^\infty t \, \mathrm{d} F_{pq}^{(x)}(t) \simeq y^3.$$

Vom observa că relaţia obţinută corespunde legii lui Rayleigh în cazul fenomenului de hysterezis la suprafeţe feromagnetice şi legii lui Dorey de la fenomenul de hysterezis apăsare-încordare, legi care concordă foarte bine cu datele experimentale.

Remarcăm faptul că dacă presupunem

$$y \sim d_i(p, q), \quad i = 1, 2,$$

atunci

$$\int_0^\infty t \mathrm{d} F_{pq}^{(x)}(t) - y$$

şi că această relaţie este confirmată foarte bine în experienţe cu sisteme magnetice cooperative.

Menţionăm că este posibil ca metodele sugerate de spaţiile metrice statistice să fie aplicate în alte domenii ale ştiinţei în special în biologie şi psihologie.

Înainte de a termina vom remarca faptul că este posibil ca şi teoria spaţiilor quasi-metrice statistice să-şi găsească aplicaţii interesante, în special în domeniile în care prezenţa unei simetrii, reversibilitatea nu pare să fie prezentă în sistemul studiat.

11.3. Unele inegalităţi pentru funcţii hypergeometrice

În cele ce urmează vom da ca aplicaţie a teoriei spaţiilor metrice probabiliste unele inegalităţi din teoria funcţiilor hypergeometrice confluente.

Fie pentru aceasta S o submulţime din mulţimea variabilelor aleatoare independente cu valori în R^n şi să presupunem că orice element $p \in S$ are o densitate de probabilitate g_p normală şi sferic simetrică, adică

$$g_p(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_p^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_p^2} |u - c_p|^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde u este centrul, iar c_p valoarea medie sînt puncte în R^n. În acest caz distanţa euclidiană $d(p, q)$ între p, q este o variabilă aleatoare care are funcţia de repartiţie de tip χ^2 şi este dată de formula

$$F_{pq}(x) = \left(\frac{s_{pq}}{\sigma_{pq}}\right)^{1-n/2} e^{\left[\frac{-s_{pq}^2}{2\sigma_{pq}^2}\right]} \int_0^{x/\sigma_{pq}} y^{\frac{n}{2}} I_{(n/2)-1}\left(\frac{\delta_{pq}}{\sigma_{pq}}\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

cu $s_{pq} = |c_p - c_q|$, $\sigma_{pq}^2 = \sigma_p^2 + \sigma_q^2$, iar $I_{(n/2)-1}$ este funcţia Bessel modificată de primul tip şi ordin $(n/2) - 1$.

Pentru orice întreg $k \geqslant 0$, momentul de ordin k pentru F_{pq} există şi are forma

$$M_s(p, q) = 2^{k/2} \frac{\Gamma[(n+k)]}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \sigma_{pq}^k {}_1F_1\left(-\frac{k}{2}, \frac{n}{2}, -\frac{s_{pq}^2}{2\sigma_{pq}^2}\right),$$

unde ${}_1F_1$ este funcţia hypergeometrică confluentă standard.

M. Fréchet a arătat că funcţia

$$(p, q) \to M_k^{1/k}(p, q),$$

definită pe S, oricare ar fi $k \geqslant 1$ este o metrică, adică au loc inegalităţile

$$M_k^{1/k}(p, r) \leqslant M_k^{1/k}(p, q) + M_k^{1/k}(q, r)$$

şi dacă $k \in [0,1]$. Tot M. Fréchet a arătat că

$$M_k(p, r) \leqslant M_k(p, q) + M_k(q, r),$$

deoarece celelalte proprietăţi ale metricii sînt evidente.
Dacă punem în aceste inegalităţi

$$s_{pq} = a,\ s_{qr} = b,\ s_{pr} = c,$$

$$\sigma_{pq} = x,\ \sigma_{qr} = y,\ \sigma_{pr} = z,$$

rezultă inegalităţile pentru funcţiile hypergeometrice confluente, pe care nu le mai transcriem.

Vom remarca faptul că inegalităţile obţinute sînt de natură pur teoretică.

Scanned with OKEN Scanner

Appendix

I. Topologie generală

I.1. SPAȚIU TOPOLOGIC ȘI SPAȚIU BITOPOLOGIC. Dacă $\mathscr{X}$ este o mulțime oarecare, o colecție $\mathscr{D}$ de submulțimi ale lui $\mathscr{X}$, se spune că formează o topologie dacă următoarele condiții sînt îndeplinite

1. $\emptyset$ (mulțimea vidă), $\mathscr{X} \in \mathscr{D}$,
2. orice intersecție finită de submulțimi din $\mathscr{D}$ este în $\mathscr{D}$,
3. reuniunea unei familii arbitrare de mulțimi din $\mathscr{D}$ este în $\mathscr{D}$.

Perechea $(\mathscr{X}, \mathscr{D})$ se numește spațiu topologic,

Dacă topologia $\mathscr{D}_1$ are proprietatea că $\mathscr{D}_1 \subseteq \mathscr{D}$, $\mathscr{D}$ fiind de asemenea o topologie, se spune că $\mathscr{D}$ este mai tare, ori că $\mathscr{D}_1$ este mai slabă decît $\mathscr{D}$.

Prin vecinătate a unui punct se înțelege orice submulțime a lui $\mathscr{X}$ care conține o mulțime din $\mathscr{D}$ și care conține punctul respectiv. Mulțimile din $\mathscr{D}$ se numesc deschise și orice complementară de mulțime deschisă este prin definiție mulțime închisă.

Prin spațiu bitopologic se înțelege tripletul $(\mathscr{X}, \mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$ unde $\mathscr{D}_1$ $\mathscr{D}_2$, sînt topologii.

I.2. FUNCȚII CONTINUE. Dacă $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ sînt două spații topologice și f o funcție $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ atunci f este continuă în x_0 dacă oricare ar fi vecinătatea V a punctului $f(x_0)$ există o vecinătate $\underset{\sim}{v} \ni x_0$ astfel ca $f(x) \in V$ oricare ar fi $x \in \underset{\sim}{v}$. Funcția f este continuă pe $\mathscr{X}$ dacă este continuă în orice punct a lui $\mathscr{X}$.

I. 3. SPAȚIU TOPOLOGIC HAUSDORFF, REGULAT ȘI NORMAL. Un spațiu topologic $\mathscr{X}$ se spune că este Hausdorff dacă :

1. oricare ar fi $x \in \mathscr{X}$, $\{x\}$ este o mulțime închisă,

Scanned with OKEN Scanner

2. oricare ar fi $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ există vecinătăţile $V_x \ni x$, $V_y \ni y$, astfel ca $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Spaţiul topologic $\mathcal{X}$ se numeşte regulat dacă:

1. pentru orice $x \in \mathcal{X}$, $\{x\}$ este o mulţime închisă,
2. oricare ar fi F o mulţime închisă în $\mathcal{X}$ şi $x \notin A$ atunci există o vecinătate a punctului care nu interesectează mulţimea F.

Spaţiul $\mathcal{X}$ se numeşte normal dacă:

1. pentru orice $x \in \mathcal{X}$, $\{x\}$ este o mulţime închisă,
2. oricare ar fi F_1, F_2 mulţimi închise $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, există mulţimile deschise G_1, G_2 astfel ca $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_i \supset F_i$, $i = 1, 2$.

I.4. SPAŢIU METRIC. SPAŢIU METRIZABIL. O mulţime $\mathcal{X}$ se spune că este un spaţiu metric dacă pe produsul cartezian este definită o funcţie ρ cu valori reale astfel ca următoarele condiţii să fie îndeplinite:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\forall\ x, y \in \mathcal{X}$,
2. $\rho(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$,
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\ x, y \in \mathcal{X}$,
4. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathcal{X}$.

Prin sferă de centru x şi rază ε se înţelege mulţimea $S(x, \varepsilon)$ definită prin

$$\{x,\ \rho(X, y) < \varepsilon\}.$$

Topologia pe $\mathcal{X}$ care conţine toate aceste sfere se va numi topologia metrică a lui $\mathcal{X}$.

Prin spaţiu metrizabil se înţelege orice spaţiu topologic $\mathcal{X}$ cu proprietatea că există o metrică ρ astfel ca topologia metrică ataşată acestei metrici să fie tocmai topologia dată pe $\mathcal{X}$.

I.5. SPAŢIU CVASI-METRIC. SPAŢIU CVASI-METRIZABIL. Se spune că o funcţie $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to R$, unde $\mathcal{X}$ este o mulţime oarecare, este cvasi-metrică dacă

1. $d(x, y) = 0$, dacă şi numai dacă $x = y$,
2. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\ x, y, z \in \mathcal{X}$.

Evident că

$$d': \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to R$$

Scanned with OKEN Scanner

definită prin

$$d'(x, y) = d(x, y)$$

este de asemenea o cvasi-metrică.

Prin spațiu cvasi-metric se înțelege perechea $(\mathscr{X}, d)$ unde d este o cvasi-metrică. Dacă $(\mathscr{X}, d)$ este un spațiu cvasi-metric atunci prin $S(x, \varepsilon)$ se înțelege mulțimea $\{x, d(x, y) < \varepsilon\}$, iar prin $R(x, \varepsilon)$ mulțimea $\{y, d'(x, y) < \varepsilon\}$. Mulțimile $\{S(x, \varepsilon), \varepsilon > 0, x \in \mathscr{X}\}$ și $\{R(x, \varepsilon), \varepsilon > 0, x \in \mathscr{X}\}$ formează baze pentru topologiile τ_d și similar pentru $\tau_{d'}$. Evident $(\mathscr{X}, \tau_d \tau_{d'})$ este un spațiu bitopologic.

Aproape ca în cazul spațiilor topologice se definește spațiul bitopologic cvasi-metrizabil și deoarece este clar cum se poate face acest lucru îl vom omite.

I. 6. SPAȚIU UNIFORM. SPAȚII CVASI-UNIFORME. Prin familie de uniformități pe o mulțime $\mathscr{X}$ se înțelege o familie nevidă $\mathscr{U}$ de mulțimi din $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ cu următoarele proprietăți :

1. $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U \supset \Delta$, $'\Delta = \{x, x), \ x \in \mathscr{X}\}$, diagonala)
2. $U, V \in \mathscr{U} \Rightarrow U \bigcap V \in \mathscr{U}$,
3. dacă $U \in \mathscr{U}$ și $V \supset U \Rightarrow V \in \mathscr{U}$,
4. $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$,
5. dacă $U \in \mathscr{U}$, $(\exists)$ $V \in \mathscr{Y}$ astfel ca $V \circ U \subset \mathscr{U}$.

Pentru înțelegerea definiției de mai sus sînt necesare cîteva observații : prin relație pe o mulțime $\mathscr{X}$ se înțelege o mulțime de perechi ordonate de elemente din $\mathscr{X}$ (adică o parte din $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$). Fie R o relație pe $\mathscr{X}$ și să definim relația

$$R^{-1} = \{(x,y), (y, x) \in R\}$$

și dacă S este o altă relație

$$R \circ S = \{(x,z), \exists\, y \in \mathscr{X} \text{ astfel ca } (x,y) \in S \text{ și } (y,z) \in R\}.$$

Un spațiu uniform este perechea $(\mathscr{X}, \mathscr{U})$ unde $\mathscr{U}$ este o familie de uniformități pe $\mathscr{X}$.

Prin definiție, prin bază $\mathscr{V}$ a unei familii de uniformități $\mathscr{U}$ pe $\mathscr{X}$ se înțelege o subfamilie a familiei $\mathscr{U}$ astfel că orice membru din $\mathscr{U}$ conține un membru al familiei $\mathscr{V}$, iar prin subbază $\mathscr{W}$ se înțelege o familie de mulțimi astfel că orice $U \in \mathscr{U}$ conține intersecția unui număr finit de elemente din $\mathscr{W}$.

Scanned with OKEN Scanner

O topologie pe $\mathscr{X}$ se poate defini astfel: fie $\mathscr{U}$ o familie de uniformități pe $\mathscr{X}$ și τ familia submulțimilor lui $\mathscr{X}$ astfel ca pentru orice $x \in \mathscr{X}$, există $U \in \mathscr{U}$, astfel ca $U_{[x]} \subset \mathscr{X}$ unde, dacă R este o relație în $A \subset \mathscr{X}$

$$R_{[A]} = \{y \in \mathscr{X}, \exists\, x \in A, \quad (x,y) \in R\}.$$

Această topologie τ este astfel încît pentru fiecare $x \in \mathscr{X}$ $\{U_{[x]}, U \in \mathscr{U}\}$ este o bază de vecinătăți pentru $x \in \mathscr{X}$.

O funcție $d : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to R$ se numește pseudo-metrică dacă are proprietățile 1, 3, 4, din definiția unei metrici dată mai înainte și prin spațiu pseudo-metric se înțelege perechea $(\mathscr{X},d)$ cu d pseudo-metrică.

Este evident că $S_{d,r} = \{(x, y),\ d(x, y) < r\}$ formează o bază de uniformități pe $\mathscr{X}$ și, mai general, dacă $\{d_\alpha\}_{\alpha \in I}$ este o familie de pseudo-metrici pe $\mathscr{X}$, atunci o familie de uniformități pe $\mathscr{X}$ este $\{S_{d_\alpha,r}\}_{\alpha \in I}$, $r > 0$.

Rezultatul fundamental, care arată legătura între spațiile uniforme și familiile de pseudo-metrici a fost dat de către A. Weil și se enunță astfel: oricare ar fi spațiul uniform $(\mathscr{X}, \mathscr{U})$ există o familie de pseudo-metrici $\{d_\alpha\}_{\alpha \in I}$ care definesc aceeași structură uniformă $\mathscr{U}$.

Este evident modul cum se pot defini spațiile topologice uniformizabile și de aceea vom omite acest lucru.

I. 7. GRUP TOPOLOGIC. Prin grup topologic se înțelege tripletul $(G,\cdot, \tau)$ unde $(G,\cdot)$ este un grup și

$$(a, b) \to ab^{-1}$$

este continuă de la $G \times G \to G$ (elementul identitate al grupului se va nota cu e). O funcție $f : G \times G \to G$ se spune că este ivariantă la stînga dacă

$$f(a,b) = f(ca,\ cb)$$

oricare ar fi $a,\ b,\ c \in G$.

II. Funcții de repartiție și probabilitate

II. 1. FUNCȚIE DE REPARTIȚIE. O funcție reală F definită pe $(-\infty, \infty)$ care este crescătoare și continuă la stînga și are proprietățile

$$\alpha)\ F(-\infty) = 0,$$
$$\beta)\ F(+\infty) = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

se numește funcție de repartiție. O funcție de repartiție se spune că este degenerată dacă este de forma

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geqslant a \end{cases}$$

II. 2. CORP BORELIAN. O colecție de submulțimi ale unei mulțimi Ω se spune că este un corp borelian dacă :

$$\alpha)\ A \in \mathscr{F} \Rightarrow C_A \in \mathscr{F}\ (C_A = \{\omega;\ \omega \in \Omega,\ \omega \notin A\}).$$

$$\beta)\ A_j \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{F}$$

II.3. PROBABILITATE. Prin probabilitate pe mulțimea Ω se înțelege o funcție P definită pe un corp borelian de părți ale lui Ω cu următoarele proprietăți :

$$\alpha)\ P(A) \geqslant 0,\ A \in \mathscr{F},$$

$$\beta)\ \text{Dacă } A_j \in \mathscr{F},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$$

atunci

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} P(A_j),$$

$$\gamma)\ P(\Omega) = 1.$$

II. 4. SPAȚIU PROBABILIZAT SAU CÎMP DE PROBABILITATE. Prin aceasta se înțelege un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, unde Ω este o mulțime, $\mathscr{F}$ un corp borelian iar P este o probabilitate.

II.5. URMA UNUI CORP BORELIAN $\mathscr{F}$. Fie Δ o mulțime în Ω și cu $\mathscr{F}$ un corp borelian. Prin *urmă* a corpului borelian $\mathscr{F}$ vom înelege colecția mulțimilor de forma $A \cap \Delta$ cu $A \in \mathscr{F}$, care se verifică ușor că este un corp pe care îl notăm cu F_Δ.

II. 6. VARIABILĂ ALEATOARE. Fie Ω o mulțime, iar $\mathscr{F}$ un corp borelian de părți ale lui Ω. Prin variabilă aleatoare vom înțelege o funcție f definită pe o parte $\Delta \subset \Omega$ cu valori în dreapta extinsă $R^* = [-\infty, +\infty]$ astfel ca oricare ar fi mulțimea boreliană B de pe dreapta (la care se adaugă unul sau amîndouă din punctele $+\infty$, $-\infty$), are loc relația :

$$\{w,\ f(\omega) \in B\} \cap \Delta \in \Delta \cap \mathscr{F}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde prin $\Delta \cap \mathcal{F}$ am notat urma corpului borelian $\mathcal{F}$ pe mulțimea Δ.

Observație. Definiția dată este foarte generală și în multe aplicații se lucrează cu variabile aleatoare cu proprietățile :

$$\alpha)\ \Delta = \Omega.$$

β) Sînt finite aproape peste tot, adică $\{\omega, f(\omega) = +\infty\} \cup \{\omega, f(\omega) = -\infty\}$ are probabilitatea nulă.

II. 7. FUNCȚIE DE REPARTIȚIE. Fie f o variabilă aleatoare și să punem pentru orice $x \in R$

$$F(x) = P(\{\omega,\ f(\omega) \in (-\infty, x]\}).$$

Funcția $x \to F(x)$ se numește funcția de repartiție a variabilei aleatoare f. Un punct x_0 se spune că este în suportul funcției de repartiție F dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$ și mulțimea punctelor suport se mai numește și suportul lui F.

II. 8. CONVERGENȚA FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE. Fie $\{F_n\}$ un șir de funcții de repartiție și F o altă funcție de repartiție. Se spune că $F_n \xrightarrow{w} F$ (convergența slabă) dacă oricare ar fi x punct de continuitate al funcției F

$$\lim F_n(x) = F(x).$$

II.9. METRICA LUI LÉVI. Fie F și G două funcții de repartiție. Prin definiție $L(F, G)$ este infimumul numerelor $\varepsilon > 0$ astfel ca

$$\forall\, x \in R,\ G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant G(x + \varepsilon) + \varepsilon$$

Dacă $\mathcal{D}$ este mulțimea funcțiilor de repartiție atunci aplicația :

$$L : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to R_+$$

definită prin $(F, G) \to L(F, G)$ este o metrică pe $\mathcal{D}$ și dacă $\{F_n\}$ este un șir care converge în această metrică către funcția de repartiție F atunci

$$F_n \xrightarrow{v} F$$

și

$$\lim F_n(+\infty) - F_n(-\infty) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

II.10. FUNCȚIE CARACTERISTICĂ. Dacă F este o funcție de repartiție atunci funcția sa caracteristică este prin definiție funcția f defintă prin

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

II. 11. DENSITATE A UNEI FUNCȚII DE REPARTIȚIE. Dacă F este o funcție de repartiție crescătoare, conform unei teoreme celebre a lui Lebesgue $F'(x)$ există în afara unei mulțimi de măsură Lebesque zero (presupunem că $F(-\infty) = 0$). Prin definiție, prin densitate a funcției de repartiție F vom înțelege orice funcție pozitivă f care este egală cu F' în afară unei mulțimi care are măsura Lebesque nulă. Se spune că F are densitate funcția f dacă pentru orice $x \in R$ avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

II. 12. FUNCȚIA EMPIRICĂ DE REPARTIȚIE. Să presupunem că avem un șir $\{x_n\}_1^\infty$ de variabile aleatoare care au aceeași funcție de repartiție F. Pentru orice $\omega \in \Omega$, $\{x_n(\omega)\}_1^\infty$ poate fi aranjat într-un șir crescător

$$y_{n_1}(\omega) \leqslant y_{n_2}(\omega) \leqslant \ldots \leqslant y_{n_n}(\omega)$$

și funcția empirică de repartiție $F_n(\omega)$ este prin definiție funcția

$$F_n(x, \omega) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y_{n_1}(\omega), \\ \dfrac{k}{n}, & y_{n_k}(\omega) \leqslant x \leqslant y_{n_{k+1}}(\omega), \\ 1, & y_{n_n}(\omega) \leqslant x. \end{cases}$$

II.13. CONVOLUȚIA A DOUĂ FUNCȚII DE REPARTIȚIE. Fie F, G două funcții de repartiție, atunci convoluția lor este prin definiție funcția H definită prin

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x - y)\, dG(y), \quad x \in R$$

și pe scurt, aceasta se mai scrie $H = F \otimes G$.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate demonstra următorul rezultat (interesant deoarece este legat de axiomatica spaţiilor metrice probabiliste de tip Wald) : dacă X_1, X_2 sînt două variabile independente care au funcţiile de repartiţie F respectiv G atunci variabila aleatoare $X = X_1 + X_2$ are ca funcţie de repartiţie funcţia $H = F \otimes G$.

II.14. CÎTEVA FUNCŢII DE REPARTIŢIE. Vom da acum o listă de funcţii de repartiţie împreună cu funcţiile caracteristice corespunzătoare.

(1) $F = \varepsilon_a$; $f(t) = e^{iat}$,

(2) $F = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1$; $f(t) = \cos at$.

(3) Funcţia de repartiţie a lui Bernoulli :

$$F(t) = q\,\varepsilon_0 + p\,\varepsilon_1; \quad 1 \geqslant p \geqslant 0,\ q = 1 - p; \quad f(t) = 1 + p\,(e^{it} - 1)$$

(4) $F = \sum_0^n (n/k)\, p^k\, q^{n-1}\, \varepsilon_k$, $f(t) = (q + pe^{it})^n$

(5) $F = \sum_0^\infty q^n\, p^n \varepsilon_n$, $\qquad f(t) = p\,(1 - qe^{it})^{-1}$

(6) Funcţia de repartiţie a lui Poisson :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^u}{n!}\, \varepsilon_n,\ f(t) = e^{\lambda}\,(e^{i} - 1).$$

(7) Funcţia de repartiţie exponenţială cu media λ^{-1} are densitatea

$$\lambda\, x\, e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0, \quad f(t) = (1 - \lambda^{-1}\, it)^{-1}.$$

(8) Funcţia de repartiţie normală $N(m, \sigma^2)$ are densitatea

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]},\ x \in R, \quad f(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

(9) Funcţia de repartiţie a lui Cauchy, cu parametrul $a > 0$ are ca densitate

$$\frac{a}{\pi\,(a^2 + x^2)},\ x \in R, \quad f(t) = e^{-a|t|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

II. 15. FUNCȚIA DE PROBABILITATE A LUI KOLMOGOROV. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un cîmp de probabilitate și Ω_1 o mulțime arbitrară, iar $f : \Omega_1 \to \Omega_1$ o funcție arbitrară. Să definim

$$\mathcal{F}^f = \{A \subset \Omega_1,\ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

care se verifică imediat că este un corp borelian. Se poate defini o probabilitate pe $P^{(f)}$ prin

$$P^{(f)}(A) = P((f^{-1}(A))$$

și $(\Omega_1, \mathcal{F}^f, P^f)$ este un cîmp de probabilitate. Probabilitatea $P^{(f)}$ se numește funcția de probabilitate a lui f.

Observație. Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare f se poate obține cu ajutorul funcției de probabilitate și anume:

$$F(x) = p^{(f)}((-\infty,\ x]).$$

III. Ecuația lui Cauchy

III. 1. INTRODUCERE. Ecuația lui Cauchy este una din cele mai simple ecuații funcționale și a constituit obiectul a numeroase cercetări. Vom menționa că studiul acestei ecuații l-a condus pe G. Hamel la considerarea celebrelor sale funcții. De asemenea această ecuație a intervenit și în cap. II al acestei cărți. În acest appendix vom da demonstrația rezultatului de care ne-am folosit.

III. 2. ECUAȚIA LUI CAUCHY. Fie R mulțimea numerelor reale și $f : R \to R$. Se spune că f verifică ecuația lui Cauchy dacă oricare ar fi $x, y \in R$ avem

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Este evident că funcțiile f_α definite prin

$$f_\alpha(x) = \alpha x,$$

cu α un număr real fix satisfac ecuația lui Cauchy. Vom observa că orice funcție f_α este continuă. Următoarea teoremă arată importanța acestor funcții pentru ecuația lui Cauchy.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1. Orice soluţie continuă (adică oricare f continuă şi care satisface ecuaţia lui Cauchy) este una din funcţiile f_α.

De asemenea are loc şi:

TEOREMA 2. Orice soluţie mărginită într-o vecinătate a originii este una din funcţiile f_α.

Vom da acum demonstraţiile acestor teoreme.

Dăm mai întîi următoarea:

LEMĂ. Dacă f este o soluţie a ecuaţiei lui Cauchy atunci pentru orice număr raţional r avem

$$f(rx) = rf(x).$$

Demonstraţie. Este evident că pentru orice m întreg avem

$$f(mx) = mf(x).$$

Cum pentru orice $r = m/n$ avem

$$f(rx) = f(m\,x/n) = mf(x/n),$$
$$f(y) = f(n\,y/n) = n\,f(y/n),$$

obţinem relaţia din enunţ.

Demonstraţia teoremei 1. Pentru orice x real, fie $\{x_n\}$ un şir de numere raţionale cu proprietatea că $x_n \to x$. Deci conform lemei de mai sus avem, ţinînd cont că f este continuă

$$f(x) = \lim\ g(x_n \cdot 1) = \lim\ x_n f(1) = xf(1)$$

şi punînd $\alpha = f(1)$ obţinem teorema 1.

Pentru a demonstra cea de a doua teoremă avem nevoie de următoarea:

LEMĂ. Orice soluţie a ecuaţiei lui Cauchy care este continuă într-un punct este continuă peste tot.

Demonstraţie. Fie x_0 arbitrar şi $x_n \to x_0$. Dacă x^* este punctul în care f este continuă, rezultă că

$$y_n = x_n - x_0 + x^*$$

Scanned with OKEN Scanner

converge către x^* şi deci $\lim f(y_n) = f(x^*)$. Dar

$$f(y_n) = f(x_n) - f(x_0) + f(x^*)$$

de unde rezultă că

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

şi lema este demonstrată.

Demonstraţia teoremei 2. Să presupunem că vecinătatea originii pe care f este mărginită are forma

$$V_\eta = (-\eta, \eta), \quad \eta > 0$$

şi deci

$$|f(x)| < M; \quad \forall x \in V_\eta.$$

Fie $x_n \to 0$ şi să presupunem că $x_n = x/n$. În acest caz avem

$$f(x/n) = 1/n\, f(x),$$

şi dacă $x \in V_\eta$ obţinem

$$|f(x/n)| \leqslant 1/n \cdot M$$

care ne dă că $f(x/n) \to 0 = f(0)$. Fie $\{x_n\}$ arbitrar astfel ca $x_n \to 0$. În acest caz dacă $n \geqslant N_\eta$ cu proprietatea

$$|x_n - \eta/2 \;\; 1/n| < 1/n \cdot \eta/2$$

deducem că

$$|f(x_n) - 1/n f(x)| < 1/n\, |f(x/2)| \leqslant 1/n \cdot M$$

care arată că f este continuă în $x = 0$ şi afirmaţia teoremei rezultă din lema de mai înainte.

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. Menger, K. *Statistical metrics.* În: Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. nr. 28 p. 535—537, 1942.
2. Wald, A. *On a statistical generalization of metric spaces.* În: Proc. Nat. Acad. Sci, 29, U.S.A., p. 196—197 (1943) [Note: A slightly extended version appears in: Reports of a Mathematical Colloquium, 2nd Series, 5—6, p. 76—79, (1944), reprinted in: Abraham Wald; Selected Papers in Statistics and Probability, John Wiley Sons, New York, p. 413—416, 1955]
3. Menger, K. *The theory of relativity and geometry. Albert Einstein Philosopher-Scientist, The Library of Living Philosophers.* În: Vol. VII, ed. by P.A. Schilpp, Evanston, III, 1943.
4. Menger K. *Probabilistic theories of relations.* În: Proc. Nat. Acad. Sci., 37, U.S.A., p. 178—180, 1951.
5. Menger, K. *Probabilistic geometry.* În: Proc. Nat. Acad. Sci., 37, U.S.A., p. 226—229, (1951) .
6. Menger, K. *Ensembles flous et fonctions aleatoires.* În: C.R. Acad. SciParis, nr. 232, p. 2001—2003, 1951.
7. Menger, K. *Géométrie générale* (Chap. VII) În: Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, No 124, 1954.
8. Špaêek, A. *Note on K. Menger's probabilistic geonetry.* În: Czechoslovak Math· J., 6(81) p. 72—74, 1956.
9. Schweizer, B. and Sklar, A. *Espaces metriques aléatoires.* In: C.R. Acad., Sci., Paris, nr. 347, p. 2092—1094, 1958.
10. Menger, K., Schweizer, B., and Sklar, A. *On probabilistic metrics and numerical metrics with probability 1.* În: Czechoslovak Math. J 9(84), p. 459—466, 1959.
11. Sklar, A. *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs merges.* În: Publ. Inst. Statistique Univ., Paris, nr. 8, p. 229—231, 1959.
12. Schweizer, B. and Sklar, A. *Statistical metric spaces,* În: Pacific J. Math., nr. 10, p. 313—334, 1960.
13. Schweizer, B. Sklar, A. and Thorp, E. *The metrization of statistical metric spaces.* În: Pacific J. Math, nr. 10, p. 673—675, 1960
14. Spacek, A. *Random metric spaces, Transactions of the Second Prague, Conference on Information Theory.,* În: Statistical Decisioon Functions and Random Processes, p. 627—638, 1960.
15. Thorp, E. *Best — possible triangle inequalities for statistical metric spaces.* În: Proc. Amer. Math. Soc. nr. 11, p. 734—740, 1960.
16. Istrătescu, V. and Văduva, I. *Products of statistical metric spaces.* În: Stud. Cerc. Mat. nr. 12, p. 567—574, 1961
17. Schweizer, B. and Sklar, A. *Associative functions and statistical triangle inequalities.* În: Publicationes Mathematicae, Debrecen, nr. 8, p. 169—186 1961.

Scanned with OKEN Scanner

42. Sherwood, H. *Complete probabilistic metric spaces and random veriable generated spaces.* În : Ph. D. Thesis, Univ. of Arizona, 1965.
43. Stevens R. R., *Probabilistic metrics and probability measures on metrics.* În : Ph. D. Thesis, Univ. of Arizona 1965.
44. Wagner, F. *Statistical topological spaces.* În : Notices Amer. Math. Soc. nr. 12, p. 588, 1965.
45. Xavier, A. F. S., *On the product of probabilistic metric spaces.* În : Universidade Federal Do Ceara, Instituto De Mathematica, 1965.
46. Egbert, R. J. *Producte and quotients of probabilistic metric spaces.* În : Ph. D. thesis, Univ. of Arizona 1966.
47. Mushtari, D. Kn. and Serstnev, A. N. *On methods of introducing a topology into random metric spaces.* În : Izv. Vysh., Matematika, nr. 6 (55), p. 99—106, 1966.
48. Schweizer, B. *On the uniform continuity of the probabilistic distance.* În : Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 5. p. 357—360, 1966.
49. Sehgal, V. M. *Some fixed point theoreme in functional analysis and probabilit.* În : Ph. D. thes's, Wayne State University, 1966.
50. Sherwood, H. *On the completion of probabilistic metric spaces.* În : Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., nr. 6, p. 62—64, 1966.
51. Fritsche, R. T. *Topologies for probabilistic metric spaces.* În : Ph. D. Thesis Univ. of, Arizona, 1965.
52. Mushtari, D. Kh. *On the completion of random metric spaces.* În : Kazan, Gos. Univ. Ucen. Zap. 127, Kn. 3, p. 109—119, 1965.
53. Prochaska, B. J. *On random normed spaces.* În : Ph. D. thesis, Clemson University, 1965.
54. Schweizer, B. *Probabilistic metric spaces — the first 25 years.* În : *The New* York Statistician, nr. 19, 3—6, 1965.
55. Serstnev, A. N. *On the connection between probabilistic metric spaces and Spacek spaces.* În : Kazan. Gos Univ. Ucen. Zap. nr. 127, Kn. 3, p. 120—123, 1965,
56. Calabrese, P. *Ttriangle inequalities in statistical metric spaces.* În : Ph. D. thesis. I11. Inst. of. Technology, 1968.
57. Chilewski, R. *On the random metric spaces of Serstnev,* M.S. thesis. În : I11. Inst. of Technology, 1968.
58. Egbert, R. J. *Products and quotients of probabistic metric spaces.* În : Pacific J. Math, 24. p. 437—455, 1968.
59. Marcus, P. *Probabilistic metric spaces and stochastic processes.* În Ph. D. thesis I11 Inst. of. Te-hnology, 1968.
60. Menger, K. *Mathematical implications of Mach's ideas.* În : Positivistic geometry the clarification of functional connections, Ernst Mach Physicist and Philosopher Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. VI, (Synthese Library), Edited by R. S. Cohen and R. J. Seeger, (D. Reidel Publ. Co., Dordrecht — Holland, 1968).
61. Mushtari, D. Kh. *On the linearity of isometric mappings of random normed spaces.* În : Kazan, Cocs Univ. Ucen. Zap. 128, Kn. 2, p. 87—90 1968.
62. Serstnev, A. N. *On Boolean logics.* În : Kazan. Gos. Univ. Ucen. Zap. 128, Kn. 2, p. 48—62, 1968.
63. Sibley, D. A. *A metric for weak convergence of distribution functions.* În : Senior, honors thesis, Univ. of Massachusetts, 1968.
64. Stevens, R. R. *Metrically generated probabilistic metric, spaces.* În :Fundamenta Mathematicae, 61, p. 259—269, 1968.
65. Xavier, F. S. *On the product of probabilistic metric spaces.* În : Portugal, Math. 27, p. 137—147, 1968.
66. Istrăţescu, V. *On generalized probabilistic metric spaces I.* În : Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14, p. 515—519, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

Indice alfabetic

Aproximaţie ~ cea mai bună 155

Bază pentru topologie 55

Ciclu hysterezis 218
continuitate integrală 195
contracţie 167, 168
convergenţă punctuală 199
— slabă 197, 227
convexitate 123
curbă 124
cvasi-inversă 118
cvasi-metrică 13
cvasi-metric generat 106

Diametru probabilist 87
— orbital 179
dinamică topologică probabilistă 185
distanţă probabilistă 90
dual 153

Elipsă 210
energie informaţională 277
E — spaţiu 112
— — nearhimedean 113
exterior convexă 124

Funcţie frontieră 70
— de probabilitate 27
— profil 62
funcţie triunghiulară 19, 22, 146
funcţia lui Kuratowski 180
— — Hausdorff 183
funcţională lineară 153
fuzzy 75

Generator aditiv 34
g — topologie 63

Hysterezis 208

Lema lui Zorn 53

Măsură de necompacitate 180
metrică Hausdorff-Pompeiu 87
— Kingman 140
— Lévy 196
metrica lui Sibley 197
— Wald-Harnack 141
m — metrică 213
metrizabilitate 78
mulţime determinantă 70
mulţimi fuzzy 74
mulţime φ — închisă 62

Neutralizator la stînga 32
normă strictă 164
— triunghiulară 14

Perechi contractive 176
produse de spaţii 81
pseudo-inversă 32
pseudo-metric generat 115
p-sir Cauchy 59
punct idempotent 37
— nilpotent 37

Rang numeric 50
relaţia „între" 126

Scanned with OKEN Scanner

Segment 135
semigrup arhimedean 33
seminorme echivalente 148
şir 1-Cauchy 59
sisteme dinamice 185
— — discrete 192
— — dispersive 193
— — izomorfe 189
— — probabiliste dispersive 194
— — — generalizate 111
spaţiu bitopologic 14
— — Hausdorff 56
— — generalizat 61, 63
— cît 94, 95
— cvasi metric 13
— — — probabilist 15, 106
— echilateral 23
— metric 11, 13
— — admisibil 211
— — aleator 17, 25
— — — simplu 26
spaţiu metric aleator de ordin p 18
— — probabilist 14
— — — generalizat 27
— — — nearhimedean 17
— — — simplu 25
— — — de tip Menger
— — — — — Şerstnev 19, 20
— — — — — Wald 15, 19, 20, 24
— — — — — — regulat 135
— — — cu bază 151
— — — separabil 151
spaţii izometrice 114
— local convexe probabiliste 165
— metric convexe 124
— topologice generalizate 63
— — probabiliste 76
stabilitate 189

Topologie 55
— generalizată 63
T — produs 82
t — conormă 48
t — normă 14, 20, 29
— arhimedeană 32
— optimală 50
— strictă 32

θ — închidere 72
— continuă la stînga 72
X, g — topologie 69
— clasificatoare 183
— densificatoare 184
$_1(\varepsilon,\lambda)$ — vecinătate 56
$(\varepsilon,\lambda)_1$ — vecinătate 56
φ — închisă 62

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

An introduction to the theory of probabilistic metric spaces with applications

The book presents a complete theory of probabilistic metric spaces and some applications especially to hysteresis phenomenon. The theory of probabilistic metric spaces (briefly PM spaces or PMS—spaces) was initiated by Karl Menger in 1942. Important contributions to this theory were made by A. Wald, B. Schweizer and A. Sklar, and others.

The setting in which we present the theory is in the so called bitopological probabilistic spaces, considered here for the first time. Some elements of functional analysis are also given and a short account about probabilistic topological dynamics. An important problem studied in this book is that of geometry of probabilistic metric spaces.

In the book a complete theory of the so called *t*-norms is given.

The study of topologies for some classes of probabilistic metric spaces is presented.

A chapter is dedicated to new ways to obtaining new spaces using product and quotient spaces.

It is well known the importance of the theory of fixed points in non-linear analysis; in the book a chapter treats this problem in the setting of PM-spaces. The connection between t-norms and Lévy's matrics is also studied. The book contains an appendix containing notions and results needed in the book.

The book is addressed to mathematicians and can be used as reference text or text-book; it is useful to specialists in probability and statitcs, engineers and students of mathematics and physics departments.

The book contains the following chapters: Probabilistic metric spaces; t-norms; The topology on probabilistic metric spaces; Products and quotients of PM-spaces; The generation of PM-spaces; The geometry of PM-spaces; Normed probabilistic spaces; Fixed points and probabilistic metric spaces; Probabilistic topological dynamics; Metrics on the space of distribution functions. Appendix. References.

The author has Ph.D. in mathematics. His research fields include the theory of operators on Hilbert and Banach spaces. He is a frequent contributor to various mathematical journals from Romania and other countries, in which has published over 80 papers especially in the theory of linear operators, nonlinear functional analysis and in probability theory. He is also the author of the first monograph edited in the world dedicated to the theory of fixed points (An introduction to the theory of fixed points. Bucharest, Editura Academiei R.S.R. — 1973 — in Romanian).

Einführung in die theorie der probabilistischen metrischen räume mit anwendungen

In diesem Buch wird eine vollständige Theorie der probabilistischen metrischen Räume mit Anwendungen insbesondere auf die Hysteresistheorie entwickelt. Die Theorie der probabilistischen metrischen Räume (kurz PM-Räume genannt) wurde in 1942 von Karl Menger eingeführt. Wichtige Beiträge zu dieser Theorie lieferten A. Wald, B. Schweizer, A. Sklar u.a.

Die Theorie soll nun im Rahmen probabilistischer bitopologischer Räume dargestellt werden, die hier erstmalig eingeführt und untersucht werden. Elemente der Funktionalanalysis und eine kurze Darstellung der probabilistischen topologischen Dynamik werden gegeben. Als weitere wichtige Frage wird die Geometrie der PM-Räume studiert.

Das Buch bringt ferner eine vollständige Erörterung der *t*-Normen, ihrer Eigenschaften und ihres Struktursatzes. Auch die Topologie verschiedener Klassen probabilistischer Räume wird untersucht.

Die Erzielung neuer Raumklassen (Produkt-—-und Quotientenräume) wird in einem besonderen Kapitel behandelt. Die Theorie der Fixpunkte ist auch in der nichtlinearen Analysis wichtig, dem ebenfalls ein Kapitel gewidmet ist. Der Zusammenhang zwischen den *t*-Normen und den Levyschen Metriken wird ebenfalls erörtert. Den Abschlug des Buches bildet ein Anhang mit Begriffen und Ergebnisse, die das Verständnis des Gelessenen erleichtern.

Das Buch will Mathematikern als Informations — und auch als Nachschlagetext dienen. Es ist aber auch für Fachleute der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik, Ingenieure, Studenten der Fakultäten für Mathematik, Mechanik und Physik von Nutzen.

Der Band ist in folgende Kapitel unterteilt; Probabilistische metrische Räume; *t*-Normen; Topologie der probabilistischen metrischen Räume; Probabilistische Produkt und Quotientenräume; Erzeugung probabilistischer metrischer Räume; Geometrie der probabilistischen metrischen Räume; Probabilistische normierte Räume; Fixpunkte und probabilistische metrische Räume; Dynamik der probabilistischen Topologie; Metriken auf dem Raum der Verteilungsfunktionen; Anwendungen der Theorie probabilistischer metrischer Räume. Anhang. Literaturverzeichnis.

Der Autor ist Doktor der Mathematik und bekannt durch seine Untersuchungen in der Theorie von Operatoren auf Hilbert und Banachräumen. Er veröffentlichte in rumänischen und ausländischen Fachzeitschriften ungefähr 80 Arbeiten auf den Gebieten der Theorie linearer Operatoren, der nichtlinearen Funktional-analysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er verfasste das erste Buch über die Theorie der Fixpunkte, auf Weltebene (Introducere în teoria punctelor fixe. Bukarest, Editura Academiei R.S.R., 1973).

Introduction à la théorie des espaces métriques probabilistiques avec applications

Ce livre contient la théorie complète des espaces métriques probabilistiques avec certaines applications notamment de la théorie du phénomène de l'hystérésis. La théorie des espaces métriques probabilistiques (en abrégé : espaces PM ou PMS espaces) fut proposée pour la première fois par Karl Menger en 1942. A Wald, B. Schweitzer et A. Sklar et autres y ont apporté d'importantes contributions.

Scanned with OKEN Scanner

Ce livre la présente dans le cadre des espaces bitopologiques probabilistiques lesquels sont introduits et étudiés pour la première fois, l'auteur donnant quelques éléments d'analyse fonctionnelle et faisant une brève présentation de la dynamique topologique probabilistique. Un problème important étudié également est la géométrie des espaces métriques probabilistiques.

Le lecteur pourra trouver un exposé complet sur les ainsi dites normes t, avec leurs propriétés et le théorème de leur structure, ainsi qu'une étude sur les topologies pour certaines classes d'espaces probabilistiques.

Le problème soulevé par l'obtention de nouvelles classes d'espaces par l'emploi des produits d'espaces et quotients revêt une grande importance ; aussi lui a-t-on consacré un chapitre spécial.

L'importance de la théorie des points fixes dans l'analyse non linéaire est bien connue ; pour cette raison on lui a consacré un chapitre. La relation entre les normes t et les metriques de Lévy est examinée aussi. Une annexe à la fin du livre donne les notions et les résultats qui aident à une lecture plus courante.

Le livre est écrit à l'intention surtoût des mathematiciens — comme texte informatif et de référence à la fois — mais peut servir tout aussi bien aux spécialistes statisticiens, aux ingénieurs, étudiants.

Il comporte les chapitres suivants : Espaces métriques probabilistes ; t-normes ; Topologie des espaces métriques probabilistes ; Produits d'espaces et espaces quotients probabilistes ; Génération des espaces métriques probabiliste, Géométrie des espaces métriques probabiliste ; Espaces normés probabiliste ; Points fixes et espaces métriques probabiliste ; Dynamique topologique probabiliste ; Métriques sur l'espace des fonctions de répartition. Applications de la théorie des espaces métriques probabiliste. Annexe. Bibliographie.

L'auteur, docteur és sciences mathématiques, est connu par ses travaux sur la théorie des opérateurs sur les espaces Hilbert et les espaces Banach. Il a déjà publié, en Roumanie, ou à l'étranger, environ 80 travaux dans le domaine de la théorie des opérateurs linéaires, de l'analyse fonctionnelle non linéaire, et dans la théorie des probabilités. Il est également l'auteur de la première monographie sur la théorie des points fixes, publié dans le monde entier (Introduction à la théorie des points fixes, Bucarest, Editura Academiei R.S.R., 1973).

Вбедение в теорию вероятностных метрических пространств и их применения

В книге излагается полная теория вероятностных метрических пространств, с приложениями в теории гистерезисного явления. Теория вероятностных метрических пространств была основана в 1942 году Карлом Менгером. Существенный вклад в эту теорию внесли А. Вальд, Б. Швейцер А. Склар и др. Теория излагается в рамках вероятностных битопологических пространств, впервые вводимые и исследуемые в настоящей книги. Даются элементы функционального анализа и краткое описание вероятностной топологической динамики. Особое внимание уделяется в книге геометрии вероятностных метрических пространств.

В книге даются полное изложение так называемых t-норм с их свойствами и теорема о структуре. Исследованы также топологии некоторых классов вероятностных пространств.

Scanned with OKEN Scanner

Одна глава посвящена весьма интересному вопросу получения новых классов пространств, при помощи произведений пространств и факторпространств.

Всем известно, какое место занимает теория неподвижных точек в нелинейном анализе; в настоящей книге этому вопросу посвящена целая глава. Рассматривается также связь t-норм с метриками Леви. В заключение дается приложение, содержащее облегчающие чтение, используемые в книге, основные понятия и результаты.

Книга представляет интерес для математиков, как информационный и ссылочный материал, она полезна также специалистам по теории вероятностей и математической статистики, инженерам, студентам математических, механических и физических факультетов.

Книга содержит следующие главы: вероятностные метрические пространства, t-нормы, топология вероятностных метрических пространств, произведения вероятностных пространств и факторпространства, порождение вероятностных метрических пространств, геометрия вероятностных метрических пространств, вероятностные нормированные пространства, неподвижные точки и вероятностные метрические пространства, вероятностная топологическая динамика, метрики на пространстве функций распределения, приложения теории вероятностных метрических пространств, приложения, литература.

Автор, доктор математических наук, известен своими работами по теории операторов в гильбертовых и банаховых пространствах, опубликовав в румынских и иностранных журналах свыше 80 статей по теории линейных операторов, нелинейному функциональному анализу и теории вероятностей. Он является автором первой монографии по теории неподвижных точек (Введение в теорию неподвижных точек, Бухарест, Издательство Академии С.Р.Р., 1973).

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea cuprinde următoarele capitole: Spații metrice probabiliste; t — norme; Topologia spațiilor metrice probabiliste; Produse de spații și spații cît probabiliste; Generarea spațiilor metrice probabiliste; Geometria spațiilor metrice probabiliste; Spații normate probabiliste; Puncte fixe și spații metrice probabiliste; Dinamica topologică probabilistă; Metrici pe spațiul funcțiilor de repartiție. Aplicații ale teoriei spațiilor metrice probabiliste. Cartea se adresează matematicienilor; atît ca text de informație cît și ca text de referință; ea este de asemenea utilă specialiștilor în probabilități și statistică, inginerilor, studenților de la facultățile de matematică — mecanică, fizică.

Scanned with OKEN Scanner